



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

—
.
3

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XXXII.

1

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGIOBORFF.

NEUE FOLGE

BAND XXII.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT ACHTUNDNEUNZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DAS HEERE

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

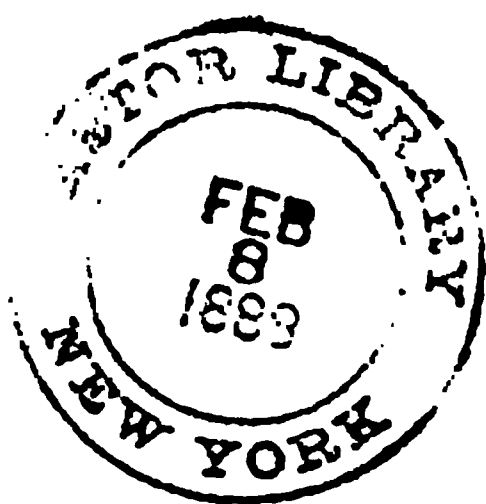
NEBST FÜNF FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1887. 4.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

1

.25963.



JOY VON
CLARK
1883

I n h a l t.

Neue Folge. Band XXXII.

Neuntes Heft.

	Seite
I. R. v. Helmholtz. Versuche mit einem Dampfstrahl . . .	1
II. A. Wüllner. Ueber den electrischen Rückstand und die Influenz in dielectrischen Körpern	19
III. F. Exner: Zur Contacttheorie	53
IV. W. Hallwachs. Zur Theorie einiger Versuche des Hrn. F. Exner	64
V. J. Elster u. H. Geitel. Ueber die Electricitätsentwicklung bei der Tröpfchenreibung	74
VI. W. Hankel Endgültige Feststellung der auf den Bergkrystal- len an den Enden der Nebenaxen bei steigender und sinken- der Temperatur auftretenden electrischen Polaritäten . . .	91
VII. S. Kalischer. Ueber die Beziehung der electrischen Lei- tungsfähigkeit des Selens zum Lichte	108
VIII. J. Gubkin. Electrolytische Metallabscheidung an der freien Oberfläche einer Salzlösung	114
IX. F. Streintz. Experimentaluntersuchungen über die galva- nische Polarisation	116
X. H. Haga. Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. Budde über meine Experimentaluntersuchung über die Fortführung der Wärme durch den galvanischen Strom	131

	Seite
XI. A. v. Waltenhofen. Neuere Versuche über die Magnetisierungsformel	133
XII. F. Schumann. Electromagnetische Rotationserscheinungen flüssiger Leiter	141
XIII. W. v. Bezold. Ueber eine neue Methode zur Zerlegung des weissen Lichtes in Complementärfarben	165
XIV. E. Kock. Zur Kenntniss der Beziehungen zwischen optischen Eigenschaften und Constitution der Verbindungen	167
XV. W. v. Bezold. Experimentaluntersuchungen über rotirende Flüssigkeiten	171
XVI. L. Pfaundler. Ueber die Bezeichnung der Maasssysteme .	188
XVII. F. Friedrichs. Ueber eine galvanische Batterie . . .	191

Geschlossen am 1. August 1887.

Zehntes Heft.

I. W. König. Ueber die Bestimmung von Reibungscoëfficienten tropfbarer Flüssigkeiten mittelst drehender Schwingungen	193
II. — Nachtrag zu den „Magnetischen Untersuchungen an Kristallen“	222
III. F. Koláček. Versuch einer Dispersionserklärung vom Standpunkte der electromagnetischen Lichttheorie	224
IV. H. F. Weber. Die Entwicklung der Lichtemission glühender fester Körper	256
V. F. Stenger. Zur Lichtemission glühender fester Körper .	271
VI. B. Hecht. Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. Pulfrich über die Wollaston'sche Methode	275
VII. E. Mach u. P. Salcher. Photographische Fixirung der durch Projectile in der Luft eingeleiteten Vorgänge . . .	277
VIII. W. Peukert. Ueber die Erklärung des Waltenhofen'schen Phänomens der anomalen Magnetisirung	291
IX. E. Hoppe. Zur magnetelectrischen Induction	297
X. F. Neesen. Erwiderung auf die Bemerkungen von V. Dvořák zu meiner Arbeit: Akustische Beobachtungen	310

XI.	W. Müller-Erzbach. Die Dissociation des Kupfervitriols in höherer Temperatur	313
XII.	R. Schulze. Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. Müller-Erzbach: „Die Verdampfungsgeschwindigkeit als Maass für den Dampfdruck“	329
XIII.	S. Tereschin. Ueber electricische Fortführung bei Flüssigkeiten	333

Geschlossen am 15. September 1887.

Elftes Heft.

I.	H. Ebert. Ueber die Abhängigkeit der Wellenlänge des Lichtes von seiner Intensität	337
II.	E. Pringsheim. Ueber die chemische Wirkung des Lichts auf Chlorknallgas	384
III.	F. Koláček. Nachtrag zur Abhandlung: „Versuch einer Dispersionserklärung etc.“	428
IV.	A. Winkelmann. Notiz zur anomalen Dispersion glühender Metalldämpfe	439
V.	F. Tegetmeier u. E. Warburg. Ueber eine besondere Art von electricischer Polarisation in Krystallen	442
VI.	G. Wiedemann. Magnetische Untersuchungen	452
VII.	M. Planck. Ueber das Princip der Vermehrung der Entropie	462
VIII.	F. Braun. Bemerkung über den Zusammenhang der Compressibilität einer Lösung mit derjenigen der Bestandtheile	504
IX.	J. H. Koosen. Ueber die Eigenschaften der Alkalien, die electromotorische Kraft des Zinks zu erhöhen	508
X.	F. Exner. Zur Theorie meiner Versuche über Contact-electricität	515
XI.	H. Lorberg. Notiz zu dem Aufsatz des Hrn. Clausius: „Erwiderung auf eine Bemerkung des Hrn. Lorberg in Bezug auf dynamoelectrische Maschinen“	521
XII.	W. Voigt. Zur Erklärung der elliptischen Polarisation bei Reflexion an durchsichtigen Medien	526

Geschlossen am 15. October 1887.

Zwölftes Heft.

	Seite
I. G. Quincke. Ueber anormale Erscheinungen bei dielectrischen Flüssigkeiten, besonders bei Rapsöl	529
II. S. Arrhenius. Ueber das Leitungsvermögen der phosphorescirenden Luft	545
III. R. Krüger. Ueber den Widerstand dünner Metallplatten	572
IV. P. Drude. Ueber die Gesetze der Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze absorbirender Krystalle . . .	584
V. L. Matthiessen. Ueber die Wanderung der Interferenzcurven zweier mikroskopischer Kreiswellensysteme auf der Oberflächenhaut von Flüssigkeiten	626
VI. O. E. Meyer. Ueber die Bestimmung der inneren Reibung nach Coulomb's Verfahren	642
VII. F. Melde. Ueber einige Anwendungen enger Glasröhren	659
VIII. S. Tanaka. Ueber Klangfiguren, insbesondere über die Schwingungen quadratischer Platten	670
IX. G. Tammann. Ueber den Einfluss geringer Beimengungen auf die Dampfspannungen von Flüssigkeiten	683
X. R. v. Kövesligethy. Zum Draper'schen Gesetze . . .	699
Berichtigung	700
Namenregister	701

Geschlossen am 10. November 1887.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf.	I.	R. v. Helmholtz, Fig. 1. — Elster u. Geitel, Fig. 2. — Gubkin, Fig. 3—5. — F. Streintz, Fig. 6. — Schumann, Fig. 7. — v. Bezold, Fig. 8—10.
Taf.	II.	W. König, Fig. 1—3. — Mach u. Salcher, Fig. 4—17. — Hoppe, Fig. 18—19.
Taf.	III.	Ebert, Fig. 1—3. — Pringsheim, Fig. 4—9. — Tegetmeier u. Warburg, Fig. 10.
Taf.	IV.	Arrhenius, Fig. 1—3. — Krüger, Fig. 4—6. — Matthiessen, Fig. 7—11. — Melde, Fig. 12—14.
Taf.	V.	Tanaka. ——— ——— ———

e ohne Dielectricum vorhandene Potentialfunction in der Collectorplatte im Verhältniss von $1 - a$ zu 1 vermindert. Der Quotient $(1 - a)/(1 - a_0)$ gibt also die Werthe der Potentialfunction in der Collectorplatte, bezogen auf jene zur Zeit Null bei vorhandenem Dielectricum als Einheit. Neben den direct aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthen $1 - a$ sind deshalb auch die Quotienten $(1 - a)/(1 - a_0)$ angeführt, welche den Gang der Influenz ganz direct mit dem Gange der Rückstandsbildung vergleichen lassen.

Die in folgender Tabelle vollständig mitgetheilte Beobachtungsreihe bezieht sich auf ein Stück einer Scheibe, welche über einer aus der Werkstätte des Prof. Carl in München im Jahre 1870 bezogenen Influenzmaschine von ausgezeichnete Wirkung angehört hatte. Das Glas war noch mit der dunklen Firnissschicht bedeckt, welche man den rotirenden Scheiben der Influenzmaschinen zu geben pflegt. .

Die Dicke des Glases ist $\delta = 2,92$ mm.

Der Abstand der Collectorplatte von der Condensatorplatte somit, da der Abstand derselben von dem Dielectricum stets 0,2 mm war, $d = 3,12$.

Die Capacität der Collectorplatte in dieser Lage war $390 = C$.

Als die Glasplatte zwischen die Platten des Condensators gelegt und nun durch Umwerfen der Wippe die Platte mit dem Electrometer eine solche Ladung erhalten hatte, dass das Electrometer eine Ablenkung von 113,5 mm zeigte, wirkte das sofortige Hochziehen der Collectorplatte eine Ablenkung von 400,1 mm. Die Capacität C_0 ergibt sich deshalb aus:

$$(1 + C_0) 113,5 = 1,0772 \cdot 400,1; \quad C_0 = 2,797.$$

Es wurde nun, nachdem die Glasplatte auf ihren electrischen Zustand untersucht und unelectrisch befunden war, dass das mit der Batterie in Verbindung stehende Electrometer fest die Ablenkung 113,5 zeigte, durch Umwerfen der Wippe die Collectorplatte auf denselben Potentialwerth gebracht und über der Glasplatte hängen gelassen. Als die Collectorplatte darauf mit dem Schlage der 24. Minute aufgezogen wurde, gab die hochgezogene Platte eine Ablenkung

Platten hatten seit 1876 zwischen Glasplatten verpackt gelegen, sie lieferten anfänglich viel grössere Dielectritätsconstanten als später, zum Theil auch als ich früher abgeleitet hatte, und einen erheblich rascheren Verlauf der Influenz. Als sie längere Zeit an der Luft gelegen hatten, wurde die Dielectritätsconstante kleiner und bei gleichem Feuchtigkeitsgehalt der Luft auch der Gang der Influenz ein langsamerer.

Ich theile nur einige der beobachteten Reihen mit, etwa diejenigen, welche die am weitest auseinander gehenden Werthe geliefert haben. An den dünnsten Ebonitplatten I und II hatte ich früher den Gang der Influenz nicht verfolgen können.

Tabelle VIII.

Ebonitplatte I, 1,12 mm dick.

Zeit	$1 - a$		$\frac{1 - a}{1 - a_0}$	$1 - a$	$\frac{1 - a}{1 - a_0}$
	beob.	ber.			
0' 0"	0,4600	0,4600	1	0,5052	1
— 20	0,4171	0,4242	0,9065	—	—
— 40	0,4047	0,4057	0,8798	—	—
1 —	0,3942	0,3942	0,8570	0,4496	0,8900
— 20	0,3847	0,3855	0,8363	—	—
— 40	0,3791	0,3782	0,8241	—	—
2 —	0,3733	0,3719	0,8115	0,4389	0,8686
3 —	0,3543	0,3564	0,7702	0,4324	0,8559
4 —	0,3440	0,3442	0,7478	0,4280	0,8472
5 —	0,3346	0,3344	0,7274	0,4245	0,8403
6 —	0,3261	0,3260	0,7089	0,4190	0,8294
8 —	0,3100	0,3123	0,6739	0,4100	0,8116
10 —	0,2978	0,3008	0,6474	0,4039	0,7995
12 —	0,2891	0,2906	0,6285	0,3998	0,7914
16 —	0,2731	0,2721	0,5937	0,3881	0,7682
20 —	0,2557	0,2553	0,5559	0,3837	0,7595
24 —	—	—	—	0,3811	0,7554

Vor 10 Jahren hatte ich für dieselbe Platte I mit dem Sinuselectrometer als Werth der Potentialfunction nach der ersten Minute $1 - a = 0,3937$ und bei constanter Ladung nach 10" $1 - a = 0,3865$ erhalten, man sieht, die in der ersten Reihe enthaltenen Werthe entsprechen den früheren, die in der zweiten Reihe erhaltenen sind erheblich grösser. Die erste Beobachtungsreihe lässt sich, wenn nach der früher von mir angewandten Bezeichnung ϵ den Grenzwert an-

die *H*-Polarisation unter jenen in 2) gefundenen liegen. Nach Unterbrechung des Stromes ergab sich für $\text{Ag} | \text{Ag} + \text{H}$ ein sehr geringer Rest der Polarisation (0,04 Volt nach 1 Minute), für $\text{Ag} + \text{O} | \text{Ag}$ hingegen nach:

0 ^m	2 ^m	7 ^m	13 ^m	23 ^m
1,08	1,03	0,93	0,86	0,04

4) e. K. = 5,5 V.

	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	5 ^m	6 ^m	
Ag + O , Ag =	—	1,31	—	1,34	—	1,36	
Ag , Ag + H =	0,73	—	0,76	—	0,77	—	
	7 ^m	8 ^m	9 ^m	15 ^m	16 ^m	18 ^m	19 ^m
Ag + O , Ag =	—	1,36	—	1,36	—	1,36	—
Ag ! Ag + H =	0,78	—	0,78	—	0,78	—	0,78.

5) e. K. = 7,7 V.

	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	6,5 ^m	8 ^m
$\text{Ag} + \text{O} \text{Ag} =$	—	1,30	—	1,40	—	1,43
$\text{Ag} \text{Ag} + \text{H} =$	0,67	—	0,66	—	0,67	—
	9,5 ^m	11 ^m	12,5 ^m	14 ^m	16 ^m	18 ^m
$\text{Ag} + \text{O} \text{Ag} =$	—	1,44	—	1,44	—	1,44
$\text{Ag} \text{Ag} + \text{H} =$	0,67	—	0,66	—	0,68	—.

6) e. K. = 9,9 V.

	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	8 ^m	9 ^m	10 ^m
$\text{Ag} + \text{O} \text{Ag} =$	—	1,32	—	1,37	1,37	—	1,37
$\text{Ag} \text{Ag} + \text{H} =$	0,79	—	0,83	—	—	0,90	—
	11 ^m	15 ^m	17 ^m	18 ^m	19 ^m	29 ^m	30 ^m
$\text{Ag} + \text{O} \text{Ag} =$	—	1,37	—	1,37	—	1,37	—
$\text{Ag} \text{Ag} + \text{H} =$	0,93	—	0,96	—	0,96	—	0,96.

Aus den Versuchsreihen geht hervor: Die *O*-Polarisation erreicht bei einer electrolysirenden Kette, deren electromotorische Kraft der dreier Daniells ungefähr gleichkommen wird, nahezu ihren Maximalwerth. Derselbe beträgt 1,3 bis 1,4 Volt.

Die *H*-Polarisation hingegen befindet sich schon bei einem von 2 Daniell gelieferten Strome auf einem Maximalwerth (0,96 Volt); bei Anwendung von kräftigeren Ketten sinkt die *H*-Polarisation mit der Vergrößerung der electrolysirenden Kraft, um erst bei Anwendung von 9,9 Volts e. K. wieder denselben Werth zu erhalten, welchen sie schon bei 2,2 Volts besessen hatte.

Diese Beobachtungen finden sich sowohl qualitativ wie

ich dadurch prüfen, dass ich das Thomson'sche Phänomen in Quecksilber untersuchte. Meine Untersuchung, die ganz unabhängig von der theoretischen Arbeit des Hrn. H. A. Lorentz geschah, zeigte, dass im Quecksilber das Thomson'sche Phänomen nur $\frac{1}{3}$ war von dem im Wismuth. Deshalb mein Schluss, den ich als ganz richtig ansehe: das Thomson'sche Phänomen kann nicht durch Structuränderungen bedingt sein. Wenn aber als die Ursache einer Erscheinung Structuränderungen angenommen werden, muss man erwarten, dass die Grösse der Erscheinung mit der der Structuränderungen zusammenhängt.

Ich constatiere übrigens, dass Hr. Budde selbst keine Structuränderungen im Sinne der obengenannten Clausius'schen Hypothese annimmt, sondern den Thomsoneffect erklärt aus einer Aenderung in der Beziehung zwischen der in den Metallen enthaltenen Electricität und den in ihnen enthaltenen ponderablen Theilchen. Hiermit wird wohl jeder einverstanden sein: alle electrischen Erscheinungen, also auch die Thomson'sche, werden ja von jener Beziehung und deren Aenderungen abhängen.

Groningen, Mai 1887.

XI. Neuere Versuche über die Magnetisirungsformel; von A. von Waltenhofen.

Bei den Rechnungen, welche ich ausgeführt habe, um die theoretische Begründung der von Uppenborn aufgestellten Regel für die Bewickelung der Electromagnete der Dynamomaschinen zu untersuchen¹⁾, war ich zuerst veranlasst, eine Magnetisirungsformel in Anwendung zu bringen, welche als vereinigter Ausdruck der von Dub aufgefundenen empirischen Gesetze für den Einfluss der Länge und des Durchmessers betrachtet werden kann und folgendermassen lautet:

$$(1) \quad y = k \cdot ni \sqrt{l^3 d},$$

1) A. v. Waltenhofen, Zeitschr. f. Electrotechnik. 2. p. 163. 1884.

Nr.	l	d	n	i	y für $k = 0,135$	y'	k_0
XI	9,05	1,0	26	8,83	843	785	0,126
I	10,3	2,8	144	4,6	4 948	4 700	0,128
X	18,1	1,0	52	12,45	6 733	5 860	0,118
XIII	13,5	7,0	192	20,5	69 730	74 981	0,145
XIV	27,0	7,0	384	19,6	377 146	344 729	0,123
XVI	52,0	23,4	2628	5,65	3 635 944	4 111 241	0,153

Man sieht hieraus, dass die Werthe von k zwischen 0,12 und 0,15 variiren, wobei zu bemerken ist, dass die Gewichte des kleinsten und des grössten der untersuchten Eisenkerne, beziehungsweise 56 und 174 000 g betragen¹⁾, also rund wie 1 zu 3000 sich verhalten.

Die Verschiedenheiten des Magnetisirungscoëfficienten k scheinen einerseits im Einklange mit der Theorie der Permeabilität (Maxwell, Bosanquet u. a.) mit dem erreichten Sättigungsgrade (beziehungsweise mit dem Momente der Volumeinheit), und andererseits mit dem Verhältnisse der Länge zur Dicke der untersuchten Stäbe in einem gewissen Zusammenhange zu stehen, wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist, welche zeigt, dass im allgemeinen dort ein kleinerer Werth von k sich ergibt, wo ein höherer Sättigungsgrad erreicht oder die Länge im Vergleiche zum Durchmesser gross ist. Die Rubrik y'/v enthält die magnetischen Momente für die Volumeinheit (d. h. für einen Cubikcentimeter) und die Rubrik l/d den Werth des Verhältnisses der Länge zum Durchmesser.

Nr.	XI	I	X	XIII	XIV	XVI
y'/v	110	74	412	144	332	184
l/d	9,05	3,68	18,10	1,93	3,86	2,22
k	0,126	0,128	0,118	0,145	0,123	0,153

Für den Electromagnet X haben beide Verhältnisse (y'/v und l/d) die grössten Werthe und dementsprechend

1) Aus dem Volumen berechnet, wenn man die Dichte des Eisens mit Weber zu 7,78 annimmt.

Als ich sodann die Dynamomaschine abschaltete und dafür den Strom einer grossen Accumulatorenbatterie in die Magnetisirungsspirale einführte, zeigten sich zwar immer noch die Wirkungen eines ungemein kräftigen magnetischen Feldes, aber mit der Beseitigung der Stromvibrationen waren auch die physiologischen Wirkungen spurlos verschwunden.

Bezüglich des vorhin erwähnten unmagnetisirbaren Stahles will ich noch folgendes mittheilen Hr. F. Uppenborn hatte die Güte, mir ein 21,5 cm langes und 6,5 mm dickes Stäbchen dieser angeblich¹⁾ 15 Proc. Mangan enthaltenden Stahlsorte einzusenden. Ich untersuchte dasselbe in einer das Stäbchen eng umschliessenden Magnetirungsspirale von gleicher Länge mit 264 Windungen bei Anwendung von Strömen bis zu 52 Ampère und konnte dabei keine Spur von Magnetismus nachweisen. Ob übrigens der Mangan-gehalt die Ursache des unmagnetischen Verhaltens ist, möchte ich bezweifeln, da meine Versuche mit Manganstahl²⁾ (freilich von geringerem Procentgehalte) keineswegs eine auffallend geringe magnetische Permeabilität erkennen liessen.

XII. *Electromagnetische Rotationserscheinungen flüssiger Leiter; von F. Schumann.*

(Hierzu Taf. I Fig. 7.)

In den „Nachrichten der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen“ vom 6. December 1884 hat Hr. Prof. E. Riecke eine Abhandlung veröffentlicht: „Ueber die electromagnetische Rotation einer Flüssigkeit“, in der Versuche folgender Art beschrieben werden. Eine ringförmige Flüssigkeitsplatte aus einer Lösung von Zinkvitriol bestehend, welche oben und

1) Ueber den von Moses Eadon in Sheffield herrührenden unmagnetisirbaren Stahl vgl. Dingler's polyt. Journal 263. p. 60. 1887 nach den Mittheilungen des technolog. Gewerbemuseums in Wien vom Jahre 1886. p. 159.

2) A. v. Waltenhofen, Pogg. Ann. 121. p. 456. 1863.

$$v_n = A_0 \left\{ 1 - \frac{x_n^2 r^2}{8} + \frac{x_n^4 r^4}{8 \cdot 24} - \frac{x_n^6 r^6}{8 \cdot 24 \cdot 48} + \dots \right\}$$

oder einfacher mit Weglassung des beliebigen Factors:

$$v_n = \left\{ 1 - \frac{x_n^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{x_n^4 r^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{x_n^6 r^6}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \right\}$$

= $(2/x_n r) J_{x_n r}^1$, wo J^1 die Bessel'sche Function erster Art bezeichnet.

Zur Auffindung eines zweiten particulären Integrals setzen wir $u_n = v_n w$. Differenziiiren wir dies zweimal nach r und setzen die Werthe für u_n , du_n/dr , $d^2 u_n/dr^2$ in Gl. (1) ein, so erhalten wir:

$$v_n \cdot \frac{dw}{dr} + \left(\frac{3}{r} v_n + 2 \frac{dv_n}{dr} \right) w = 0 \quad \left(w \text{ für } \frac{dw}{dr} \right)$$

oder auch: $\frac{dw}{w} = - \left(\frac{3}{r} + \frac{2}{v_n} \frac{dv_n}{dr} \right) dr,$

$$lw' = -2lv_n - 3lr,$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{v_n^2 r^3}; \quad w = \int \frac{dr}{v_n^2 r^3} \quad \text{also:}$$

$$u_n = v_n \int \frac{dr}{r^3 v_n^2} = \frac{2}{x_n r} J_{x_n r}^1 \int \left(\frac{2}{x_n r} J_{x_n r}^1 \right)^2 r^3$$

oder in anderer Form:

$$u_n = \frac{x_n}{2r} J_{x_n r}^1 \int \frac{d(x_n r)}{x_n r (J_{x_n r}^1)^2}.$$

Da nun: $\alpha J_z^1 + \beta Y_z^1 = \gamma J_z^1 \int \frac{dz}{z J_z^1 J_z^1} {}^1)$,

wo α, β, γ Constanten sind, so folgt, wenn wir die Quotienten $\alpha/\gamma = \alpha_1$ und $\beta/\gamma = \beta_1$ setzen:

$$u_n = \frac{x_n}{2r} (\alpha_1 J_{x_n r}^1 + \beta_1 Y_{x_n r}^1).$$

Ziehen wir noch sämtliche Constanten mit in die Integrationsconstante, so erhalten wir als allgemeines Integral der Gleichung (I):

$$\omega_n = \frac{1}{r} A_n J_{x_n r}^1 + \frac{1}{r} B_n Y_{x_n r}^1 - \varepsilon \frac{4A}{n^3 \pi^3} \frac{d^2}{r^2}.$$

Da die Winkelgeschwindigkeit an den beiden Electroden-

1) Lommel, Stud. über die Bessel'sche Funct. p. 107.

flächen = 0 wird, so ergibt sich zur Bestimmung der Integrationsconstanten, wenn wir mit a und b die Radien der entsprechenden Kreise bezeichnen:

$$A_n J_{x_n a}^1 + B_n Y_{x_n a}^1 = \varepsilon \frac{4A}{n^3 \pi^3} \frac{d^2}{a}, \quad A_n J_{x_n b}^1 + B_n Y_{x_n b}^1 = \varepsilon \frac{4A}{n^3 \pi^3} \frac{d^2}{b}.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $J_{x_n b}^1$, die zweite mit $J_{x_n a}^1$, darauf die erste mit $Y_{x_n b}^1$, die zweite mit $Y_{x_n a}^1$ und subtrahiert beide mal die zweite von der ersten, so folgt:

$$B_n = \frac{\varepsilon \frac{4A d^2}{n^3 \pi^3} \left\{ \frac{1}{a} J_{x_n b}^1 - \frac{1}{b} J_{x_n a}^1 \right\}}{J_{x_n b}^1 Y_{x_n a}^1 - J_{x_n a}^1 Y_{x_n b}^1} \quad \text{und:}$$

$$A_n = \frac{\varepsilon \frac{4A d^2}{n^3 \pi^3} \left\{ \frac{1}{a} Y_{x_n b}^1 - \frac{1}{b} Y_{x_n a}^1 \right\}}{J_{x_n a}^1 Y_{x_n b}^1 - J_{x_n b}^1 Y_{x_n a}^1}.$$

Es ist somit ω_n vollständig bestimmt durch:

$$\text{II) } \omega_n = \varepsilon \frac{4A}{n^3 \pi^3} \frac{d^2}{r} \left\{ \frac{J_{x_n r}^1 \left(\frac{1}{a} Y_{x_n b}^1 - \frac{1}{b} Y_{x_n a}^1 \right) - Y_{x_n r}^1 \left(\frac{1}{a} J_{x_n b}^1 - \frac{1}{b} J_{x_n a}^1 \right)}{J_{x_n a}^1 Y_{x_n b}^1 - J_{x_n b}^1 Y_{x_n a}^1} - \frac{1}{r} \right\}.$$

Hiermit haben wir einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit abgeleitet, der streng gültig ist für alle Werthe von r , und dessen numerische Berechnung mit Hülfe der Entwicklungen von Hansen für J^1 und ähnlicher Entwicklungen für Y^1 1) allerdings auf sehr umständliche Weise möglich ist. Es ist:

$$J_z^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_1 \sin \left(z - \frac{\pi}{4} \right) + Q_1 \cos \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \right\},$$

$$Y_z^1 = \left\{ \psi'(0) + \frac{3}{2} - \log 2 \right\} J_z^1 - \frac{J_z^0}{z} - \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_1 \cos \left(z - \frac{\pi}{4} \right) - Q_1 \sin \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_1' \sin \left(z - \frac{\pi}{4} \right) + Q_1' \cos \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \right\}.$$

Hier bezeichnet:

$$P_1 = \left\{ 1 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 1}{8 \cdot 16} \left(\frac{1}{z} \right)^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32} \left(\frac{1}{z} \right)^4 + \dots \right\},$$

$$Q_1 = \left\{ \frac{3}{8} \frac{1}{z} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3}{8 \cdot 16 \cdot 24} \left(\frac{1}{z} \right)^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32 \cdot 40} \left(\frac{1}{z} \right)^5 - \dots \right\},$$

1) Lommel, l. c. p. 96.

$$\begin{aligned} & \{J_{x_n a}^1 Y_{x_n b}^1 - J_{x_n b}^1 Y_{x_n a}^1\} \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x_n}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{a}} J_{x_n b}^1 \left(P_1 \cos \left(x_n a - \frac{\pi}{4} \right) - Q_1 \sin \left(x_n a - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{b}} J_{x_n a}^1 \left(P_1 \cos \left(x_n b - \frac{\pi}{4} \right) - Q_1 \sin \left(x_n b - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Führen wir diese Ausdrücke in (II) ein und setzen zur Abkürzung:

$$Z_{x_n r}^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi x_n r}} \left\{ P_1 \cos \left(x_n r - \frac{\pi}{4} \right) - Q_1 \sin \left(x_n r - \frac{\pi}{4} \right) \right\},$$

so erhalten wir:

$$(III) \quad \omega_n = \varepsilon \frac{4A}{n^3 \pi^3} \frac{d^2}{r} \left\{ \frac{Z_{x_n r}^1 \left(\frac{1}{a} J_{x_n b}^1 - \frac{1}{b} J_{x_n a}^1 \right) + J_{x_n r}^1 \left(\frac{1}{b} Z_{x_n a}^1 - \frac{1}{a} Z_{x_n b}^1 \right)}{J_{x_n b}^1 Z_{x_n a}^1 - J_{x_n a}^1 Z_{x_n b}^1} - \frac{1}{r} \right\}.$$

Mit Hülfe der Relationen:

$$\cos \left(x_n r - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sin x_n r + \cos x_n r}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sin \left(x_n r - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sin x_n r - \cos x_n r}{\sqrt{2}}$$

finden wir ferner:

$$\begin{aligned} Z_{x_n r}^1 \left(\frac{1}{a} J_{x_n b}^1 - \frac{1}{b} J_{x_n a}^1 \right) &= \frac{1}{\pi x_n} \sqrt{\frac{1}{r}} \left\{ (P_1 \sin x_n r + Q_1 \cos x_n r) \right. \\ &+ (P_1 \cos x_n r - Q_1 \sin x_n r) \left. \right\} \sqrt{\frac{1}{ab}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{a}} (P_1 \sin x_n b + Q_1 \cos x_n b) \right. \\ &- \sqrt{\frac{1}{a}} (P_1 \cos x_n b - Q_1 \sin x_n b) - \sqrt{\frac{1}{b}} (P_1 \sin x_n a + Q_1 \cos x_n a) \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{b}} (P_1 \cos x_n a - Q_1 \sin x_n a) \right\} \quad \text{und:} \\ J_{x_n r}^1 \left(\frac{1}{b} Z_{x_n a}^1 - \frac{1}{a} Z_{x_n b}^1 \right) &= \frac{1}{\pi x_n} \sqrt{\frac{1}{r}} \left\{ (P_1 \sin x_n r + Q_1 \cos x_n r) \right. \\ &- (P_1 \cos x_n r - Q_1 \sin x_n r) \left. \right\} \sqrt{\frac{1}{ab}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{b}} (P_1 \sin x_n a + Q_1 \cos x_n a) \right. \\ &+ \sqrt{\frac{1}{b}} (P_1 \cos x_n a - Q_1 \sin x_n a) - \sqrt{\frac{1}{a}} (P_1 \sin x_n b + Q_1 \cos x_n b) \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{1}{a}} (P_1 \cos x_n b - Q_1 \sin x_n b) \right\}; \end{aligned}$$

folglich ist:

$$\begin{aligned}
& Z_{\kappa_n r}^1 \left(\frac{1}{a} J_{\kappa_n b}^1 - \frac{1}{b} J_{\kappa_n a}^1 \right) + J_{\kappa_n r}^1 \left(\frac{1}{b} Z_{\kappa_n a}^1 - \frac{1}{a} Z_{\kappa_n b}^1 \right) \\
&= \frac{2}{\pi \kappa_n} \sqrt{\frac{1}{r}} \left\{ P_1 \sin \kappa_n r + Q_1 \cos \kappa_n r \right\} \left\{ \sqrt{\frac{1}{b}} (P_1 \cos \kappa_n a - Q_1 \sin \kappa_n a) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{1}{a}} (P_1 \cos \kappa_n b - Q_1 \sin \kappa_n b) \right\} \sqrt{\frac{1}{ab}} \\
&+ \frac{2}{\pi \kappa_n} \sqrt{\frac{1}{r}} \left\{ P_1 \cos \kappa_n r - Q_1 \sin \kappa_n r \right\} \left\{ -\sqrt{\frac{1}{b}} (P_1 \sin \kappa_n a + Q_1 \cos \kappa_n a) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{a}} (P_1 \sin \kappa_n b + Q_1 \cos \kappa_n b) \right\} \sqrt{\frac{1}{ab}}.
\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise lässt sich ableiten:

$$\begin{aligned}
& J_{\kappa_n b}^1 Z_{\kappa_n a}^1 - J_{\kappa_n a}^1 Z_{\kappa_n b}^1 \\
&= -\frac{2}{\pi \kappa_n} \sqrt{\frac{1}{ab}} \left\{ (P_1 \sin \kappa_n a + Q_1 \cos \kappa_n a) (P_1 \cos \kappa_n b - Q_1 \sin \kappa_n b) \right. \\
&\quad \left. - (P_1 \cos \kappa_n a - Q_1 \sin \kappa_n a) (P_1 \sin \kappa_n b + Q_1 \cos \kappa_n b) \right\}.
\end{aligned}$$

Es bietet sich daher, wenn wir noch zur Abkürzung setzen:

$$\mathfrak{J}_{\kappa_n r}^1 = P_1 \sin \kappa_n r + Q_1 \cos \kappa_n r, \quad \mathfrak{J}_{\kappa_n r}^2 = P_1 \cos \kappa_n r - Q_1 \sin \kappa_n r,$$

die neue Form:

$$\text{(IV)} \quad \omega_n = \varepsilon \frac{4A}{n^3 \pi^3} \frac{d^2}{r} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{r}} \mathfrak{J}_{\kappa_n r}^1 \left(\sqrt{\frac{1}{b}} \mathfrak{J}_{\kappa_n a}^1 - \sqrt{\frac{1}{a}} \mathfrak{J}_{\kappa_n b}^1 \right) - \sqrt{\frac{1}{r}} \mathfrak{J}_{\kappa_n r}^2 \left(\sqrt{\frac{1}{b}} \mathfrak{J}_{\kappa_n a}^2 - \sqrt{\frac{1}{a}} \mathfrak{J}_{\kappa_n b}^2 \right)}{\mathfrak{J}_{\kappa_n a}^1 \mathfrak{J}_{\kappa_n b}^2 - \mathfrak{J}_{\kappa_n a}^2 \mathfrak{J}_{\kappa_n b}^1} - \frac{1}{r} \right\}.$$

Wollen wir P_1 und Q_1 aus den oben angegebenen unendlichen Reihen berechnen, so sehen wir sofort, dass P_1 einen reellen Werth liefert, da κ_n nur in geraden Potenzen vorkommt; Q_1 dagegen einen imaginären. Um ω_n durch lauter reelle Grössen ausgedrückt zu erhalten, formen wir in folgender Weise um:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{i} \frac{d}{8n\pi r} \left\{ \frac{3}{1} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d}{8n\pi r} \right)^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{d}{8n\pi r} \right)^4 + \dots \right\} = \frac{1}{i} Q', \\
P_1 &= \left\{ 1 - \frac{1^2 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2} \left(\frac{d}{8n\pi r} \right)^2 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{d}{8n\pi r} \right)^4 - \dots \right\} = P', \\
\sin \kappa_n r &= \frac{e^{\kappa_n r i} - e^{-\kappa_n r i}}{2i}; \quad \cos \kappa_n r = \frac{e^{\kappa_n r i} + e^{-\kappa_n r i}}{2}.
\end{aligned}$$

Zinkvitriollösung.

Beobachtungsreihe XI.

Reductions f. von $B = 1,0574$; $a = 40,22$; $b = 13,4$; Südpol.

r_1	r_2	t	Tangentenbussole		$\omega \frac{\pi^2}{4A}$	η	Abweich. v. m
			A	B			
15,7	15,7	19,9	22,56	42,34	0,0518	2,846	+ 0,059
16,0	15,6	18,9	22,91	43,18	520	803	016
16,3	16,1	20,3	22,81	42,11	522	896	109
16,5	16,1	17,9	22,89	43,04	513	605	— 182
17,0	16,8	17,2	22,91	43,18	508	492	+ 0,088
17,3	17,0	17,8	22,89	42,95	503	532	128
17,2	17,2	17,5	—	43,04	502	492	088
18,7	18,4	19,5	—	42,95	450	482	078
19,0	18,8	19,6	—	42,90	435	407	003
19,4	19,1	19,7	—	43,04	421	353	— 051
19,3	19,3	20,8	22,87	42,61	419	488	+ 029
20,3	20,1	20,9	22,89	42,95	384	249	— 155
20,8	20,8	22,5	—	42,90	363	306	098
21,0	20,7	22,3	22,91	43,18	361	296	108
21,9	21,8	26,2	22,87	42,70	331	429	— 0,011
22,3	22,0	25,9	22,89	42,90	321	347	098
23,2	23,0	29,8	22,87	42,70	295	462	+ 022
23,7	23,5	29,2	22,89	42,90	283	333	— 107
24,9	24,9	34,4	22,87	42,79	255	464	+ 024
25,1	24,8	36,2	22,80	41,95	254	498	058
25,5	25,5	36,7	22,87	42,61	243	490	050
26,0	25,4	37,6	—	42,79	239	499	059
26,5	26,1	41,9	22,80	41,85	219	484	— 0,093
27,0	26,8	43,9	22,87	42,61	213	672	+ 095
29,2	29,2	50,0	—	42,49	185	572	— 005
29,3	29,5	50,7	—	—	183	580	+ 003
31,3	31,4	61,8	22,86	42,28	160	725	+ 0,103
31,0	31,0	58,7	—	—	164	653	031
32,1	32,5	62,7	—	42,39	151	619	— 003
33,0	32,8	66,7	22,81	42,06	145	643	+ 021
34,3	34,4	69,2	22,87	42,49	132	543	— 079
35,1	35,1	81,2	22,81	42,11	126	796	+ 174
35,3	35,1	77,9	—	42,06	125	379	— 243
38,0	38,3	130,6	22,80	41,90	083	940	— 0,062
38,1	38,2	136,4	—	41,85	—	3,065	+ 063

setzt; T_0 ist aber ausserdem in p und q enthalten, und wenn man es hier durch T ersetzt, so entstehen aus dem ersten Gliede der obigen Formel neue Glieder von der zweiten Ordnung der Kleinheit, die zu dem Correctionsgliede hinzugefügt werden müssen, um die vollständige Formel zu erhalten. Ich führe die Rechnung durch, indem ich zur besseren Unterscheidung die bisher gebrauchten, T_0 enthaltenden Grössen mit m_0 , p_0 und q_0 , die gesuchten mit Hülfe der beobachteten Schwingungsdauer T zu berechnenden Grössen mit m , p und q bezeichne.

Es besteht zwischen T und T_0 die Beziehung:

$$T = \frac{T_0}{1 + B \sqrt{\frac{2 T_0}{\pi}} (q_0 - p_0)},$$

$$\text{also: } \sqrt{T_0} = \sqrt{T} \left(1 + \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{2 T_0}{\pi}} (q_0 - p_0) \right).$$

$$m_0 = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2\eta}{\pi\mu}} \sqrt{T} \left(1 + \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{2 T_0}{\pi}} (q_0 - p_0) \right) \\ = m \left(1 + \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{2 T_0}{\pi}} (q_0 - p_0) \right),$$

$$p_0 + q_0 = \frac{1 + 4m + 2m^2 + 24m^3 + (4m + 4m^2 + 120m^3) \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{2 T_0}{\pi}} (q_0 - p_0)}{1 + 4m^4 + 16m^4 \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{2 T_0}{\pi}} (q_0 - p_0)} \\ = (p + q) \left\{ 1 + \frac{m + m^2 + 30m^3}{1 + 4m + 2m^2 + 24m^3} 2 B \sqrt{\frac{2 T_0}{\pi}} (q_0 - p_0) \right\} \\ \left\{ 1 + \frac{4m^4}{1 + 4m^4} 2 B \sqrt{\frac{2 T_0}{\pi}} (q_0 - p_0) \right\}^{-1}.$$

Dieser Ausdruck ist in das erste Glied der Boltzmann'schen Formel einzusetzen. Man erhält Glieder mit dem Factor B^2 , welche zu dem mit dem gleichen Factor behafteten Correctionsgliede der genannten Formel hinzuzufügen sind. Beschränkt man sich auf diese Glieder der zweiten Ordnung, so kann in allen mit B^2 multiplicirten Theilen T_0 , p_0 und q_0 durch T , p und q ersetzt werden.

Bei Versuchen über die Reibung tropfbarer Flüssigkeiten ist η klein gegen μ , daher m in der Regel kleiner als 1. In diesem Falle lässt sich das sehr unbequem zu berechnende

zwischen T und T_0 vernachlässigt werden. Ich gebe in Tab. II eine Zusammenstellung der so durch Beobachtung, resp. Berechnung gefundenen Zahlen für die drei Kugeln.

Tabelle II.

Werthe der Schwingungsdauern und Decremente bei Schwingungen in Luft.

d	t	T	λ	δ	Δ
Kugel Nr. 1.					
mm		sec			
0,4	17,1 ^o	11,991	0,01077	0,00216	0,00861
0,8	17,4	11,137	942	204	738
1,8	17,0	9,591	713	182	531
2,8	17,2	8,569	560	167	393
3,8	16,5	7,792	469	155	314
4,4	17,2	7,203	415	146	269
6,8	16,9	6,346	337	133	204
8,8	16,5	5,737	288	123	165
Kugel Nr. 2.					
0,4	16,5	16,012	0,01078	0,00222	0,00856
0,8	16,5	14,442	866	204	662
1,8	17,0	11,921	633	176	457
2,8	16,5	10,382	469	158	311
3,8	15,8	9,318	882	145	237
4,8	15,9	8,524	332	136	196
6,8	16,3	7,407	274	123	151
8,8	16,5	6,640	229	113	116
Kugel Nr. 3.					
0,4	16	24,135	0,00908	0,00224	0,00684
0,8	—	20,184	659	194	465
1,8	—	15,257	410	157	253
2,8	—	12,759	300	137	163
3,8	—	11,190	242	124	118
4,8	—	10,086	214	114	100
6,8	—	8,603	161	103	58
8,8	—	7,630	138	94	44

In der 1. Columne ist unter d der obere Fadenabstand angegeben; der untere betrug bei der Kugel Nr. 1: 1,14 mm; bei Nr. 2: 1,16 mm; bei Nr. 3: 1,55 mm. Die Länge der Fäden betrug ca. 73 cm. Die 2. Columne gibt die Temperatur t , wie sie während der Beobachtungen in dem die Kugel umgebenden, abgeschlossenen Raume gemessen wurde. Bei den Beobach-

Tabelle V.

**Werthe der Schwingungsdauern und der Decremente bei
Schwingungen im Wasser.**

Kugel Nr. 1.

2

2

Kugel Nr. 2.

Kugel Nr. 3.

Die in Tab. V enthaltenen Zahlen bilden also in erster
Linie eine experimentelle Bestätigung der von der Theorie

$$T = T_0 e^{-\frac{4\pi t}{Kk}},$$

wo T_0 nur von xyz abhängt. Wir setzen $T_0 = -\Delta\chi$.

Die Gleichungen (IV) transformiren sich dann in:

$$4\pi\mu \left(\frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) \frac{dX}{dt} = \Delta \left[X + \frac{d\chi}{dx} e^{-\frac{4\pi t}{Kk}} \right],$$

oder, weil $((K/4\pi)(\partial/\partial t) + 1/k) T$ identisch die Null ergibt, auch:

$$4\pi\mu \left(\frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{d\chi}{dx} e^{-\frac{4\pi t}{Kk}} \right) = \Delta \left(X + \frac{d\chi}{dx} e^{-\frac{4\pi t}{Kk}} \right).$$

Wir setzen:

$$X + \frac{d\chi}{dx} e^{-\frac{4\pi t}{Kk}} = \xi \text{ etc.}$$

und erhalten an Stelle der Gleichungen (IV) die neuen:

$$(V) \begin{cases} 4\pi\mu \left(\frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) \frac{d\xi}{dt} = \Delta \xi, & 4\pi\mu \left(\frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) \frac{d\eta}{dt} = \Delta \eta, \\ 4\pi\mu \left(\frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) \frac{d\zeta}{dt} = \Delta \zeta. \end{cases}$$

Vermöge der Definition der Grössen ξ, η, ζ gilt noch:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Um die Grenzbedingungen herzustellen, benutzen wir an einer Discontinuitätsfläche das Gleichungensystem:

$$(VI) \begin{cases} u = \frac{X}{k} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, & u' = \frac{X'}{k'} + \frac{K'}{4\pi} \frac{\partial X'}{\partial t}, \\ v = \frac{Y}{k} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t}, & v' = \frac{Y'}{k'} + \frac{K'}{4\pi} \frac{\partial Y'}{\partial t}, \\ w = \frac{Z}{k} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t}, & w' = \frac{Z'}{k'} + \frac{K'}{4\pi} \frac{\partial Z'}{\partial t}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz &= M, \\ X' \cos nx + Y' \cos ny + Z' \cos nz &= M', \end{aligned}$$

so folgt aus (VI) wegen:

$$u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz = u' \cos nx + v' \cos ny + w' \cos nz,$$

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) M = \left(\frac{1}{k'} + \frac{K'}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) M',$$

$$0 = \frac{d\xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{d\zeta}{dz}$$

$$= + \sum \mu \int \delta \tau \left(\frac{du}{\partial t} \frac{d}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{dv}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{dw}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right).$$

Durch particulare Integration findet man unter Berücksichtigung der Stromcontinuitätsgleichungen, dass:

$$\sum (\mu - \mu') \int \frac{df}{r} \left(\frac{du}{\partial t} \cos nx + \frac{dv}{\partial t} \cos ny + \frac{dw}{\partial t} \cos nz \right)$$

für jede Lage des Potentialpunktes Null sein muss. Dabei ist df ein Element der Grenzfläche, $\mu\mu'$ die entsprechenden magnetischen Permeabilitätscoefficienten für zwei anstossende Medien. Dies ist nur möglich, wenn an jeder Grenzfläche gilt:

$$\frac{du}{\partial t} \cos nx + \frac{dv}{\partial t} \cos ny + \frac{dw}{\partial t} \cos nz = 0.$$

Ersetzt man u durch: $\frac{X}{k} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}$, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{k} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) (X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz) = 0.$$

Addirt man hierzu die identische Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{k} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} e^{-\frac{4\pi t}{Kk}} \right) = 0,$$

so folgt durch Addition sogleich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{k} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz) = 0,$$

eine Gleichung, die, weil sie jederzeit besteht, übergehen muss in:

$$(VII) \quad \xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz = 0. \quad \text{q. e. d.}$$

Wir wollen nun daran gehen, die physikalische Bedeutung der Grössen $\xi\eta\zeta$ und der Grössen $\chi e^{-4\pi t/Kk} = \psi$ zu erörtern.

Hat man die Gleichungen (V) gelöst, so folgt wegen $\xi = - \sum \mu \int (du/\partial t) \cdot (1/r) d\tau$ für die Componente der totalen Kraft X vermöge der Definition des ξ :

$$X = - \frac{d\psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \sum \mu \int \frac{u d\tau}{r} \text{ etc.}$$

$$\text{Da } \Delta \chi e^{-\frac{4\pi t}{Kk}} = \Delta \psi = - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \text{ besteht, und}$$

$$\Delta F = -4\pi u + (1 - k) \frac{d^2 P}{\partial t \partial x},$$

wenn $k - 1 = 1/\omega^2$ gesetzt wird, was $k \geq 1$ fordert.

Für $\omega = \infty$ erhält man $\Delta F = -4\pi\mu u$ etc. wie früher.

B. Anwendung der Formeln auf electrodynamische Schwingungen in einer Kugel.

Da, wie sich leicht nachweisen lässt, radiale Schwingungen nicht möglich sind, so soll der nächst einfache Fall, wo um eine Coordinatenaxe, die x -Axe, Symmetrie besteht, eingehender behandelt werden. Schwingungen allgemeinerer Art sollen bei einer anderen Gelegenheit erörtert werden. Wir integrieren die Gleichungen (V) durch die Supposition:

$$\xi = e^{-nt} \left(\frac{d^2 S}{dy^2} + \frac{d^2 S}{dz^2} \right), \quad \eta = e^{nt} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}, \quad \zeta = e^{nt} \frac{d^2 S}{\partial x \partial y}.$$

Die Continuitätsbedingung $d\xi/dx + d\eta/dy + d\zeta/dz = 0$ ist hierdurch von selbst erfüllt. Für S ergibt sich dann die Gleichung:

$$4\pi\mu \left(\frac{K}{4\pi} n + \frac{1}{k} \right) n S = \Delta S.$$

Setzen wir S als Function des Abstandes r vom Centrum voraus, so folgt:

$$4\pi\mu \left(\frac{K}{4\pi} n + \frac{1}{k} \right) n (Sr) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Sr),$$

woraus folgt: $Sr = \sin mr$, wenn m der Gleichung:

$$(VIII) \quad 4\pi\mu \left(\frac{K}{4\pi} n + \frac{1}{k} \right) n + m^2 = 0 \text{ genügt.}$$

Vermöge der Relationen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(r) = \frac{f'(r)}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f'(r)}{r} \right) \cdot \frac{x^2}{r},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f'(r)}{r} \right) \cdot \frac{yx}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f'(r)}{r} \right) \cdot \frac{zx}{r},$$

sowie mit Rücksicht auf (VII) ergibt sich, $f(r) = \sin mr/r$ gesetzt, die Grenzbedingung $-2(f'(r))/r \cdot x/r = 0$ oder:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin mr}{r} \right) = 0 \text{ für } r = R \text{ (} R = \text{Kugelradius).}$$

(VII) erfüllt wird, eine Forderung, die auf das Verschwinden von $\partial f(r)/\partial r$ und $d\psi(r)/\partial r$ für $r = R$ hinausläuft.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so convergirt die Sinusreihe (XII) nur für $r < R$, nicht mehr aber für $r = R$. Dies tritt beispielsweise ein, wenn zur Zeit $t = 0$ sowohl ξ als $d\xi/\partial t$ in der Kugel bis hart an ihre Oberfläche constant sind, dagegen $\eta = \zeta = d\zeta/\partial t = \partial\eta/\partial t = 0$ ist.

In diesem Falle hat man für $f(r)$, $\psi(r)$ zu schreiben $c_1 r^2$, resp. $c_2 r^2$, wobei c_1 und c_2 Constante bedeuten.

Die Constanten A , B , bestimmen sich in ähnlicher Weise wie bei Fourier'schen Sinusreihen, die nach den Sinusen geradzahliger Vielfacher des Bogens aufsteigen, und zwar hat man für $t = 0$:

$$r \cdot f(r) = \sum \sin \frac{\varepsilon r}{R} \cdot B, \text{ und } \psi(r) \cdot r = \sum \sin \frac{\varepsilon r}{R} (\beta, A - \alpha, B),$$

wobei $mR = \varepsilon$, $\varepsilon = \text{tg } \varepsilon$ gilt; β , und α , sind zur Wurzel ε gehörige Werthe des α und β .

Man beweist leicht, dass, wenn $\varepsilon = \text{tg } \varepsilon$ und $\varepsilon = mR$ besteht, die Gleichungen gelten:

$$\int_0^R \sin \frac{\varepsilon r}{R} \sin \frac{\varepsilon_1 r}{R} \cdot dr = 0 \text{ und } \int_0^R \partial r \sin \frac{\varepsilon r}{R} \sin \frac{\varepsilon r}{R} = \frac{1}{2} R \sin^2 \varepsilon.$$

Damit folgt:

$$B, = \frac{2}{R \sin^2 \varepsilon} \cdot \int_0^R f(r) \cdot r \cdot \sin \frac{\varepsilon r}{R} \partial r,$$

$$\beta, A - \alpha, B = \frac{2}{R \sin^2 \varepsilon} \cdot \int_0^R \psi(r) \cdot r \cdot \sin \frac{\varepsilon r}{R} \cdot dr.$$

Die Intensität einer Partialschwingung ist dann durch $B,^2 + A,^2$ gegeben.

Im einfachsten Falle $f(r) = cr^2$, $\psi(r) = c_1 r^2$ wird ein und das andere Integral mit $\sin \varepsilon \cdot R^4/\varepsilon^2$, deshalb B , und A , mit $4R^3/(\sin \varepsilon \cdot \varepsilon^2)$, also wegen $\varepsilon = mR$ mit $R/\sin mR \cdot 1/m^2$ proportionirt. Da die meisten Wurzeln von $\varepsilon = \text{tg } \varepsilon$ in der Form $\varepsilon = (2g + \varepsilon)/\frac{1}{2}\pi$ geschrieben werden können, wo g eine ganze Zahl bedeutet, so nehmen die Amplituden der Partialschwingungen mit dem Quadrate der ungeraden Zahlen, die Intensitäten mit deren vierten Potenzen ab.

Aether erregten Kräfte sich nicht etwa auf Null reduciren. Dass letzteres nicht eintritt, lässt sich leicht beweisen, wenn die Molecüle kugelförmig sind; gleichzeitig ist zu ersehen, inwiefern die Grösse und Lage derselben ins Spiel tritt.

Die Stromstärkeänderungen im Molecül, also du/dt , $dv/\partial t$, $dw/\partial t$ lassen sich im Symmetriefalle durch Differenziation aus einer Grösse σ herleiten, die nur von der Entfernung vom Kugelmittelpunkt abhängt. Es sei für eine Partialschwingung $\sigma = (\sin m\tau/r) \cdot f(t)$ und:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{d^2\sigma}{\partial y^2} - \frac{d^2\sigma}{dz^2} \quad \frac{dv}{\partial t} = \frac{d^2\sigma}{dx dy} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dx dz}.$$

Dann ist in einem Punkte $x'y'z'$ des Aethers der von einem Molecül herrührende Kraftantheil gegeben durch:

$$\xi'_m = -\int \frac{du}{dt} \cdot d\tau \cdot \frac{1}{r} = \int \left(\frac{d^2\sigma}{dy^2} + \frac{d^2\sigma}{dz^2} \right) \frac{d\tau}{r}.$$

$$\text{Nun ist: } \int \frac{d^2\sigma}{dy^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\tau = \int \frac{d\sigma}{dy} \cos ny \frac{1}{r} dw - \int \frac{d\sigma}{dy} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau.$$

An der Molecüloberfläche ist wegen:

$$\frac{du}{dt} \cos nx + \frac{dv}{\partial t} \cos ny + \frac{dw}{\partial t} \cos nz = 0,$$

die Grösse $d\sigma/dr$, also auch $d\sigma/dy = 0$.

$$\text{Ferner ist: } \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{d}{dy'} \left(\frac{1}{r} \right).$$

$$\text{Daraus folgt: } \int \frac{d^2\sigma}{dy^2} \cdot \frac{d\tau}{r} = \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{d\sigma}{dy} \cdot \frac{d\tau}{r}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist: } \int \frac{d\sigma}{dy} \cdot \frac{1}{r} d\tau &= \int \sigma \cos ny \frac{1}{r} dw - \int \sigma \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau \\ &= \sigma_0 \int \frac{\cos ny dw}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\sigma d\tau}{r}, \end{aligned}$$

σ_0 ist dabei der Werth des σ an der Kugeloberfläche, folglich mit $\sin(mR/R)(f(t))$ gleich. Nun ist, weil σ blos von der Entfernung vom Kugelmittelpunkte ρ abhängt:

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r} = \frac{1}{r} \int_0^R \frac{\sin m\rho}{\rho} 4\rho^2 \pi d\rho = 0,$$

Größen ξ_m , η_m , ζ_m gehen als Massenpotentiale continuirlich durch die Grenzfläche hindurch. Um somit aus dem für einen Molecülpunkt gegebenen Ausdrucke des:

$$S = \sum \frac{\sin m r}{r} \cdot \frac{R}{\sin m R} \psi_m(t)$$

den Werth des S an einer Aetherstelle $x' y' z'$ herzuleiten, verbinden wir den Aetherpunkt $x' y' z'$ mit dem Kugelcentrum durch einen Radius. Gehört zu $x' y' z'$ die Grösse ξ_m' , und bezieht sich der Index „0“ auf die Kugeloberfläche, so folgt aus (XIII) für den von einer Partialschwingung herrührenden Antheil im Aether:

$$\frac{\xi_m'}{\xi_m^{(0)}} = \frac{\left(\frac{d^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right)}{\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R}},$$

$$\text{also } \xi_m' = \xi_m^{(0)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{d^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=R}}.$$

Nun ist $\xi_m^{(0)}$ gegeben durch:

$$= \left(\frac{d^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{\sin m r}{r} \right) \cdot \frac{R}{\sin m R} \psi_m(t) \quad r=R, \quad \text{somit:}$$

$$\xi_m' = - \left(\frac{d^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \left[\frac{+ \left(\frac{d^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \frac{\sin m r}{r} \cdot \frac{R}{\sin m R}}{\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right)} \right]_{r=R} \psi_m(t).$$

Im eingeklammerten Ausdrucke ist die Differentiation auszuführen und $r = R$ zu setzen. Führt man die angedeutete Operation aus, so ergibt sich:

$$\xi_m' = \frac{R}{r^3} \epsilon^2 \psi_m(t) \left(\frac{y'^2}{r^2} + \frac{z'^2}{r^2} \right);$$

y'/r , z'/r sind Richtungs cosinus des Radius.

Daraus folgt unmittelbar, dass der Mittelwerth aller Einwirkungen der Molecüle auf die Aethertheilchen sich in der Form darstellen lässt:

$$\bar{\xi}_m = \sum \epsilon^2 \psi_m(t) A, R;$$

dabei ist A , eine wesentlich positive, von der Lage und Grösse der Molecüle abhängige Grösse.

Für den Aether besteht demnach die Gleichung:

Die äussere Einwirkung setzt sich aus der der Aethertheilchen und der der Nachbarmolecüle zusammen. Letztere werden sich, insofern sie auf unser Molecül überhaupt einwirken, in denselben Zuständen wie dieses selbst befinden. Es wird also $\Psi_i(t)$ aus einem ersten Theile bestehen, der wie oben durch $R A'_i \cdot \varepsilon^2 \psi_i(t)$ ausgedrückt werden kann. Andererseits wird die Einwirkung der Aethertheilchen durch einen Ausdruck gegeben sein, der im Molecül constant ist und zu dem obigen Mittelwerthe $\bar{\xi}$ in einem constanten, von der Molecülgrösse unabhängigen Verhältnisse steht. Zerlegt man den zu diesem Werthe $\bar{\xi}$ gehörigen Werth des S , der von der Form $C r^2$ sein muss, in eine Sinusreihe, so wird der daher stammende Antheil des $\Psi_i(t)$ gegeben sein durch das Product einer Grösse a_i und eines Zeitfactors, und zwar genau desselben, der auch in $\bar{\xi}$ vorkommt.

Dabei ist a_i laut obigen Erörterungen (zum Schlusse des Absatzes B) mit $4 R^3 / (\sin \varepsilon \cdot \varepsilon^2)$ proportional, kann also durch $b_i \cdot R^3 / (\sin \varepsilon \cdot \varepsilon^2)$ ersetzt werden.

Es ist also für $\Psi_i(t)$ zu setzen:

$$R \cdot A'_i \cdot \varepsilon^2 \psi_i(t) + \frac{b_i \cdot R^3}{\sin \varepsilon \cdot \varepsilon^2} \bar{\xi},$$

wobei b_i von der Molecülgrösse nicht abhängt.

Die Schwingungsgleichungen für das Molecül lauten infolge dessen:

$$\text{XV)} \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= 4 \pi \mu \left(\frac{K}{4 \pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) \frac{\partial \psi_i(t)}{\partial t} \left[\frac{R}{\sin m R} + R A'_i \varepsilon^2 \right] + \frac{R}{\sin m R} m^2 \psi_i(t) \\ &+ 4 \pi \mu \left[\frac{K}{4 \pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \right] \left[\frac{b_i \cdot R^3}{\sin m R} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{d \bar{\xi}}{d t} \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (XIV) und (XV)¹⁾ sind die weiter zu behandelnden Dispersionsgleichungen. Wir wollen zuvörderst durchsichtige Medien behandeln, setzen also $k = \infty$. Dann hat man statt (XV) zu schreiben:

$$\text{(XV')} \quad \left\{ \begin{aligned} 4 \pi \mu \left(\frac{K}{4 \pi} \right) \left(\frac{R}{\sin m R} + R A'_i \cdot \varepsilon^2 \right) \frac{d^2 \psi_i}{d t^2} + \frac{R}{\sin m R} m^2 \psi_i(t) \\ + 4 \pi \mu \frac{K}{4 \pi} b_i \cdot \frac{R^3}{\sin m R} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{d^2 \bar{\xi}}{d t^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

1) Beide Gleichungen können mit weit weniger Mühe angesetzt werden, wenn es sich nicht um Feststellung des Einflusses der Molecülradien, sondern blos um die Form dieser Hauptgleichungen handelt.

Diese Grösse $\lambda_m^2 d$ ist es, die in Ketteler's Formel unter der Bezeichnung λ_m^2 vorkommt.

A , und A' sind mit dem specifischen Gewichte ρ proportionale Grössen. Für Licht bestimmter Sorte ist somit die brechende Kraft $N^2 - 1$ darstellbar durch die Form:

$$(XVI_{(a)}) \quad \frac{N^2 - 1}{\rho} = \sum \frac{M_i}{N_i - P_i \cdot \rho},$$

wobei M, N, P , positive, von der Farbe abhängige Grössen bedeuten.

In neuerer Zeit hat man vielfach die von Lorenz herstammende Relation $(N^2 - 1)/(N^2 + 2) \rho = \text{Const.}$ oder $N^2 - 1 = (3 \cdot C \cdot \rho)/(1 - C \rho)$ geprüft und innerhalb gewisser Grenzen als richtig befunden. Der Ausdruck $(XVI_{(a)})$ stimmt mit dem Lorenz'schen der Form nach überein, wenn man sich auf ein Summenglied beschränkt, enthält aber eine arbiträre Constante mehr, da sich aus unserer Theorie die Relation $3M_i/P_i = N_i/P_i$ nicht herleiten lässt. Die Anwendung von $(XVI_{(a)})$ auf Versuchsergebnisse müsste also noch genauere Resultate geben, als die Lorenz'sche Formel.

Wir wenden (XVI) noch auf Gase an. Dieselben sollen aus Molecülen bestehen, die voneinander so weit abstehen, dass der einem derselben zugehörige freie Aetherraum gegen das Molecularvolumen verschwindet. Bedeutet r den Abstand eines Aetherpunktes von einem Molecülcentrum, $\alpha\beta\gamma$ die Richtungscosinus des Radius, auf dem dieser Punkt liegt, so ist dem früheren zufolge die vom Molecül erzeugte Kraft in diesem Aetherpunkte:

$$\xi'_m = \frac{R}{r^3} \varepsilon^2 \psi_i(t) (1 - \alpha^2).$$

Da sie mit der Entfernung vom Centrum rasch abnimmt, so bilden wir einfachheitshalber den Mittelwerth $\bar{\xi}_m$ derart, dass wir ξ'_m mit dem Volumendifferential $2r^2 \pi dr d\varphi \sin \varphi$ multipliciren, nach r von $r = R$ bis $r = \delta$ integriren, wobei δ den halben Abstand zweier Molecülcentren bedeutet. Ist dieser das Fünf- bis Zehnfache des Radius, so können wir δ auch ∞ setzen. Das gewonnene Integral dividiren wir durch den einem Molecül zugehörigen Aetherraum, d. h. wir multipli-

(XIV) führen wir andere bequemere Bezeichnungen ein. Es sei:

$$R A_i \cdot \varepsilon^2 = p_i; \quad a_i = \frac{4\pi}{Kk}; \quad c_i = \frac{m^2}{K\mu (1 + A_i' \varepsilon^2 \sin \varepsilon)};$$

$$d_i = \frac{b_i}{m^2 (1 + A_i' \varepsilon^2 \sin \varepsilon)}; \quad f_i = \frac{4\pi}{Kk m^2 (1 + A_i' \varepsilon^2 \sin \varepsilon)} \cdot b_i.$$

Dann hat man für den Aether:

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{dt^2} - V^2 \frac{d^2 \xi}{dz^2} + \sum p_i \frac{d^2 \psi_i}{dt^2} = 0,$$

und für das Molecül:

$$\frac{d^2 \psi_i}{dt^2} + \frac{d\psi_i}{dt} a_i + c_i \psi_i + d_i \cdot \frac{d^2 \bar{\xi}}{dt^2} + f_i \frac{d\bar{\xi}}{dt} = 0.$$

Wir setzen: $\psi_i = B_i e^{i(n t + n \beta z)}$, $\bar{\xi} = B e^{n i(t + \beta z)}$.

Dann folgt: $(1 - V^2 \beta^2) B + \sum B_i p_i = 0,$

$$B_i (c_i - n^2 + n i a_i) - B [d_i \cdot n^2 - f_i n i] = 0$$

und hieraus:

$$V^2 \beta^2 = 1 + \sum \frac{p_i (d_i n^2 - f_i \cdot n i)}{c_i - n^2 + i \cdot n a_i}$$

$$= 1 + \sum \frac{p_i}{(c_i - n^2)^2 + (n a_i)^2} \cdot [d_i n^2 - f_i n i] [c_i - n^2 - i \cdot n a_i].$$

Wir setzen $\beta = \beta_0 + \beta_1 i$ und erhalten so:

$$V^2 (\beta_0^2 - \beta_1^2) = 1 + \sum \frac{p_i n^2}{(c_i - n^2)^2 + (n a_i)^2} [d_i (c_i - n^2) - f_i a_i] \cdots$$

$$2 V^2 \beta_0 \beta_1 = - n \sum \frac{p_i}{(c_i - n^2)^2 + (n a_i)^2} \cdot [f_i (c_i - n^2) + a_i d_i n^2].$$

Weil nun $a_i d_i = f_i$ ist, so lautet letztere Formel:

$$2 V^2 \beta_0 \cdot \beta_1 = - n \sum \frac{p_i \cdot f_i \cdot c_i}{(c_i - n^2)^2 + (n a_i)^2}.$$

Die gewöhnlichen absorbirenden Medien sind auf einige Wellenlängen hin im gewöhnlichen Sinne des Wortes durchsichtig. Da nun absolute Durchsichtigkeit an $4\pi/Kk = 0$ geknüpft ist, so können wir für die absorbirenden Medien $4\pi/Kk$ als Grösse erster Ordnung der Kleinheit betrachten, deshalb $f_i a_i$ als von der Ordnung $(4\pi/Kk)^2$ vernachlässigen. So erhalten wir:

$$V^2 \cdot \beta_0^2 = N^2 = 1 + \sum \frac{p_i \cdot n^2 \cdot d_i (c_i - n^2)}{(c_i - n^2)^2 + (n a_i)^2} + (V \beta_1)^2,$$

$$2 V \beta_0 \cdot V \beta_1 = -n \sum \frac{p_i c_i f_i}{(c_i - n^2)^2 + (n a_i)^2},$$

$\gamma = -V \beta_1$ ist dann der Extinctionsfactor, der sich nach dem Typus $e^{-\gamma z} \sin n(t - z/v)$ fortpflanzenden Wellen.

Führt man für $n \dots 2\pi V/\lambda$, für $c_i = m^2/K\mu(1 + A'_i \sin \epsilon \cdot \epsilon^2)$ die Grösse $(2\pi V/\lambda_i)^2$ ein, wobei λ_i die Wellenlänge der Eigenschwingung eines Molecüls bedeutet, das ohne Dämpfung unter dem Einflusse der Nachbarmolecüle schwingt, so erhält man für den Brechungsindex die Relation:

$$(XVII) \quad N^2 - 1 - \gamma^2 = \sum \frac{(\lambda^2 - \lambda_i^2) M_i}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda^2},$$

wobei M_i und g_i Constante bedeuten. Dagegen ergibt sich für den Extinctionsfactor γ die Relation:

$$(18) \quad 2N\gamma = \sum \frac{\lambda^3 M'_i}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda^2}.$$

M'_i ist wieder eine Constante.

M_i , g_i^2 , M'_i lassen sich durch a_i , c_i etc. ausdrücken. So findet man $M'_i = M_i \cdot (1/2\pi V) a_i$, oder, weil $g_i^2 = a_i^2 \cdot \lambda_i^4 / (2\pi V)^2$ ist:

$$M'_i = \frac{M_i \cdot g_i}{\lambda_i^2}.$$

Hiermit geht (18) über in:

$$(XVIII) \quad 2N\gamma = \sum \frac{M_i \cdot g_i \cdot \frac{\lambda^3}{\lambda_i^2}}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda^2}.$$

Die Formel (XVII) fällt mit einer von Ketteler¹⁾ aufgestellten und an mehreren Farbstoffen verificirten Formel zusammen. Statt Formel (XVIII) hat Ketteler in unseren Bezeichnungen:

$$(XVIII') \quad 2N\gamma = \sum \frac{M_i g_i \cdot \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda^2};$$

für enge Absorptionsgebiete sind beide Formeln (XVIII) und (XVIII') praktisch gleich, nicht aber für breite.

Hr. Ketteler hat Formel (XVII) und (XVIII') auf

1) Ketteler, Optik. p. 559.

spectrometrische, resp. photometrische Messungen, die mit Cyanin vorgenommen wurden, angewendet. Die aus beiden berechnete Grösse M , soll identisch sein; sie ist es nicht ganz; ob der Unterschied beider M , unter Anwendung meiner Formel (XVIII) sich reduciren würde, kann ich nicht sagen, da ich gegenwärtig ausser Stande bin, die weitläufigen Zahlenrechnungen durchzuführen. Unter Zugrundelegung des Tausendtelmillimeters als Einheit findet Hr. Ketteler für Cyanin (Lösung $1/38$) $g_s^2 = 0,00209$, also $g_s = 0,045$. Da nun $g_s = a_s \cdot \lambda_s^2 / (2\pi V)$ ist, und Hr. Ketteler¹⁾ $\lambda_s = 0,5940$ angibt, so lässt sich auch $a_s = 4\pi / Kk$ finden. Daraus ist berechenbar:

$$K \cdot k = \frac{2 \cdot \lambda_s^2}{g_s \cdot V}.$$

Ist γ_0 der specifische Widerstand eines Cyaninmolecüls, (das wir uns kugelförmig und aus einem Stoffe bestehend denken), Quecksilber = 1 gesetzt, so hat man in Tausendtelmillimetern und electromagnetischem Maasse:

$$k = \frac{\gamma_0 \cdot 10^9 \cdot 1000 \cdot (1000)^2}{100 \cdot 1000} = \gamma_0 \cdot 10^{13},$$

also im electrostatischen Maasse $\gamma_0 10^{13} / V^2$, wobei $V = 300\,000$ km oder $3 \cdot 10^{14}$ in Tausendtelmillimetern bedeutet.

Hieraus folgt für $K \cdot \gamma_0$ der Werth 470. Das Product aus der mittleren Dielectricitätsconstante und dem specifischen Widerstande eines Cyaninmolecüls ist also eine endliche Zeit und somit Grund zur Annahme vorhanden, dass die Molecülmasse die Eigenschaften endlicher Materie besitzt.

Die Stelle der stärksten Absorption (deren Wellenlänge λ_s) ergibt sich aus:

$$C_s = K\mu \frac{m^2}{(1 + A_s' \sin \varepsilon \cdot \varepsilon^2)} = \frac{4\pi^2 V^2}{\lambda_s^2}.$$

Daraus folgt, dass λ_s^2 mit $1 + A_s' \sin \varepsilon \cdot \varepsilon^2$ proportional ist. Da nun A_s' mit der Zahl der Molecüle in der Volumeneinheit proportional ist, so folgt daraus, dass die Wellenlänge des am stärksten absorbirten Lichtes von der Concentration abhängt. Die Wurzeln ε liegen im ersten, dritten, fünften,

1) Ketteler, l. c. p. 590.

Die Coëfficienten sind für kleine Excursionen von der Grösse der allgemeinen Coordinaten unabhängig. Der über V gemachten Annahme liegt die Hypothese zu Grunde, dass der Mechanismus, welcher die Bewegung von den Molecülen zu den Aethertheilchen vermittelt, keinerlei potentielle Energie verbraucht, etwa wie die Transmissionsräder eines Maschinenwerkes, wenn sie aus starrem Material gebaut sind und die Bewegung des Dampfmaschinenkolbens auf andere Mechanismen übertragen. Die für beide Energien aufgestellten Ausdrücke beziehen sich auf ein cylinderförmiges Volumen, dessen Axe in die Fortpflanzungsrichtung fällt. Das Hamilton'sche Princip oder die Lagrange'schen allgemeinen Gleichungen ergeben dann für den Aether die Gleichung:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \sum m_s \cdot \frac{d^2 \psi_s}{dt^2} - a \frac{d^2 \xi}{dz^2} = 0$$

und für die Molecüle:

$$\mu_s' \frac{d^2 \psi_s}{dt^2} + m_s \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} + (a_{1s} \psi_1 + a_{2s} \psi_2 + \dots) = 0.$$

Durch Coordinatentransformation gewinnt letztere Gleichung die Form:

$$\mu_s' \frac{d^2 \psi_s}{dt^2} + m_s \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_{ss} \psi_s = 0.$$

Um Absorptionsglieder einzuführen, musste eine Art molecularer Reibung berücksichtigt werden.

Trotz der formellen Einfachheit der mechanisch optischen Theorie wird man doch der electromagnetischen Fassung derselben den Vorzug geben, und zwar wegen der klaren Bedeutung aller ins Spiel kommenden physikalischen Grössen, wodurch sie zu anderen physikalischen Theorien in bestimmte, einer experimentellen Controle zugängliche Beziehungen tritt.

Brünn, Juni 1887.

Ich gebe im Folgenden das Protocoll der beiden Beobachtungsreihen, die für die Combinationen Platinlamelle-Goldlamelle und Platinlamelle-Eisenlamelle an den Abenden des 5. und 7. Mai zur Ausführung kamen.

I. Combination: Platinlamelle-Goldlamelle.

A. Platinlamelle erhitzt, Goldlamelle auf 0° abgekühlt.

Ruhelage	Stand des Magnets	Stand des Magnets
481,0	753,0 graues Licht erscheint	—
	755,2 „ „ verschwindet	—
	756,5 „ „ erscheint .	202,2
		200,5
		201,5
	757,0	—
	759,5	
	759,2	202,0
		201,7
		199,7
	754,7	—
	756,5	
	755,0	

B. Platinlamelle auf 0° abgekühlt, Goldlamelle erhitzt.

Ruhelage	Stand des Magnets	Stand des Magnets
481,8		180,5 graues Licht erscheint
		180,5 „ „ verschwindet
	777,0	181,8 „ „ erscheint
	777,0	
	775,5	180,5
		181,0
		180,4
	778,5	—
	779,2	
	779,4	184,5
		182,0
		182,5

C. Platinlamelle erhitzt, Goldlamelle auf 0° abgekühlt.

Ruhelage	Stand des Magnets	Stand des Magnets
482,3	758,0 graues Licht erscheint	
	756,5 „ „ verschwindet	
	757,1 „ „ erscheint .	203,1
		201,5
		202,7

Daraus ergeben sich als mittlere, der beginnenden Graugluht der Platin- und Goldlamelle entsprechende Ausschläge 278,0 und 298,1 Scalentheile. Werden diese Werthe auf die

Tangenten der Ausschlagswinkel reducirt, so gehen sie in 275,9 und 295,6 Scalentheile über.

Unmittelbar vor der Ausführung dieser Beobachtungen war für dasselbe Thermoelement und für vollständig identische Beobachtungsverhältnisse (von der kleinen Verschiedenheit des Widerstandes im Thermoelement bei der Grauduirung und bei der Temperatur der Graugluht konnte abgesehen werden, da sich im Galvanometerkreise ein Zusatzwiderstand von 500 Ohm befand) als Zusammenhang zwischen dem reducirten Scalenausschlag s und der (am Quecksilberthermometer abgelesenen) Temperatur t der einen Löthstelle (die andere Löthstelle auf 0° abgekühlt) gefunden worden:

$$s = 0,6246 t + 0,000\ 204 t^2.$$

Hiernach sendete die benutzte Platinlamelle die erste Spur von grauem Licht bei der Temperatur 391° aus; für die Goldlamelle begann aber das Auftreten der sichtbaren Strahlung erst erheblich später, nämlich bei der Temperatur 417° .

II. Combination: Platinlamelle und Eisenlamelle.

Zwei Tage später wurde eine ähnliche Versuchsreihe mit einer anderen Platinlamelle in Verbindung mit einer Eisenlamelle, beide von der nahezu gleichen Dicke von etwa 0,1 mm, in gleicher Weise durchgeführt.

A. Platinlamelle erhitzt, Eisenlamelle auf 0° abgekühlt.

	Stand des Magnets	Stand des Magnets
Ruhelage 490,6	198,0 graues Licht erscheint	
	196,5 „ „ verschwindet	
	197,0 „ „ erscheint . .	783,6
		785,0
		785,5
	198,5	
	197,0	
	199,4	784,0
		785,6
		786,5
	198,3	
	199,0	
	196,5	

Energievertheilung ändert, kann also nur eine objective Methode Aufschluss geben. Als solche kann man nur die Anwendung des Bolometers betrachten. Gerade dass Langley gegenwärtig mit derartigen Untersuchungen zwischen 0 und 2000° beschäftigt ist, und dass ich deren Resultate hier auch benutzen wollte, war der Grund, dass ich diese kleine Mittheilung erst jetzt veröffentlicht habe.

Phys. Inst. der Univ. Strassburg i. E.

**VI. Bemerkung zu der Abhandlung des
Hrn. Pulfrich¹⁾ über die Wollaston'sche Methode;
von B. Hecht.**

In Bezug auf den Einfluss der Brechung, welche der Grenzkegel der Totalreflexion bei Benutzung der Wollaston'schen Methode an der Austrittsfläche des Prismas erleidet, sagt Hr. Liebisch²⁾, dass „die Wollaston'sche Methode die Abweichung der Winkel χ von 90° etwas grösser erscheinen lasse, als sie in Wirklichkeit ist.“

Dieser Ansicht entgegen leitete Hr. Pulfrich³⁾ folgenden Ausdruck ab:

$$\operatorname{tg} S = \frac{\cos i}{\cos r} \operatorname{tg} S_1,$$

worin „ S den direct gemessenen Neigungswinkel, S_1 denselben vor der Brechung, i und r die Winkel bedeuten, welche der Grenzstrahl mit der Normale der Austrittsfläche“ nach und vor der Brechung bildet.

Für die Richtigkeit der Liebisch'schen Anschauung habe ich einen Beweis geliefert⁴⁾, der mit Benutzung obiger Bezeichnung auf die Gleichung:

$$\operatorname{tg} S = \frac{\cos r}{\cos i} \operatorname{tg} S_1 \text{ führt.}$$

1) C. Pulfrich, Wied. Ann. 31. p. 734. 1887.

2) Liebisch, N. Jahrb. f. Min. etc. 2. p. 63. 1886.

3) Pulfrich, N. Jahrb. f. Min. etc. Beil. 5. p. 187. 1887.

4) Hecht, N. Jahrb. f. Min. etc. 1. p. 218. 1887.

intensitäten arbeitete. Die mitunter etwas verschiedenen temporären Momente für die gleiche magnetisirende Stromstärke dürften davon herrühren, dass der magnetisirende Strom nicht in allen Fällen in ganz gleicher Weise seine Maximalintensität erreichte, da bekanntlich das temporäre Moment nicht unabhängig ist von der Art der Zunahme des magnetisirenden Stromes.

K. k. electrotechn. Institut zu Wien.

**IX. Zur magnetelectrischen Induction;
von Edm. Hoppe.**

(Hierzu Taf. II Fig. 18–19.)

In zwei früheren Mittheilungen¹⁾ habe ich Beobachtungen mitgetheilt, welche zum Theil darauf gerichtet waren, die Edlund'sche Theorie der unipolaren Induction und deren Anwendung auf die electrischen Erscheinungen der Atmosphäre als irrthümlich nachzuweisen, zum Theil die Frage behandelten, ob überhaupt ein rotirender Magnet freie Electricität auf seiner Oberfläche erzeugen könne. Besonders die letzte Frage forderte eine eingehendere Untersuchung, zumal meine damaligen Experimente mit negativem Resultat verlaufen waren. Jedem Versuche mit negativem Resultat kann vorgeworfen werden, dass die Methode oder der Messapparat ungenügend war. In der That ist von Hrn. Budde²⁾ die Vermuthung ausgesprochen, dass das Electrometer wohl zu unempfindlich gewesen sei, solche geringe Mengen nachzuweisen, und Hr. Edlund³⁾ glaubt berechnet zu haben, dass mit einem Electrometer überhaupt diese Mengen nicht nachgewiesen werden können, indem ein Thomson'sches Electrometer höchstens 0,0025 Daniell zu messen gestatte, und die electromotorische Kraft der in Frage kommenden Induction

1) Hoppe, Wied. Ann. 28. p. 478. 1886; 29. p. 544. 1886.

2) Budde, Wied. Ann. 30. p. 388. 1887.

3) Edlund, Wied. Ann. 30. p. 657. 1887.

(Fig. 18) an Stelle von *b* eingeschraubt werden konnte. Füllte ich dies jetzt mit Quecksilber, so konnte ich von oben nach Beseitigung der Ebonitplatte *h* mit der Drahtspitze des festen Leiters *B* direct hineintauchen, während das zweite Ende *A* federnd auf *d* schleifte. Nach Hrn. Edlund's Theorie soll ja in den Armen *e* eine electromotorische Kraft von innen nach aussen wirken, dann müsste der Strom also entgegengesetzt sein, wie wenn die Kraft in *b* auch wirkt. Da einer einmaligen Rotation des Schwungrades ca. 5 Umdrehungen des Magnets entsprechen, konnte ich die früher angewandte Rotationsgeschwindigkeit nicht beibehalten, da dadurch das Quecksilber aus dem Napf verspritzte. Bei langsamen Rotationen ist es aber sehr schwer, dieselbe gleichmässig zu erhalten; ich habe daher die Reduction auf eine Umdrehung hier unterlassen. Folgende Tabelle gibt über diese Verhältnisse Aufschluss, die Stromstärken wurden durch den Ausschlag der Galvanometernadel gemessen.

1) Es rotirt der Magnet mit dem gewöhnlichen Gestell II, die Federn schleifen am Ende von *b* und am Rande *d*.
27. Juni 1887.

Ruhe	Sinn der Drehung	Anzahl der Drehungen	Einstellung der Nadel	Ablenkung
+15	Erddrehung	15	+30	+15
„	Uhrdrehung	„	— 1	—16.

2) Aus dem Gestell ist die Axe *b* herausgenommen, der Quecksilbernappf eingeschoben, und das Drahtende *B* der Leitung reicht in das Hg, das andere Ende *A* federt auf dem Rande *d*.

+15	Erddrehung	ca. 8	+22	+ 7
„	Uhrdrehung	„	+ 7	— 8
14	Erddrehung	„	+21,5	+ 7,5
„	Uhrdrehung	„	+ 6	— 8
„	Erddrehung	„	+22	+ 8
15	Uhrdrehung	„	+ 7	— 8

3) Wie bei 1).

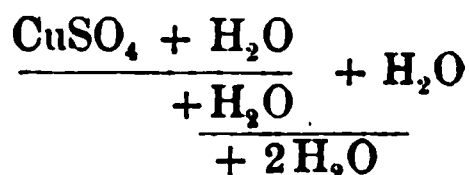
15	Erddrehung	ca. 10	+24	+ 9
„	Uhrdrehung	„	+ 5	—10.

Dass die Beobachtung dieser Bewegungserscheinungen in der tönenden seitlich begrenzten Luftsäule selbst eine Complication gegenüber der Beobachtung in freier Luft in sich schliesst, kann ich nicht zugeben. Im Gegentheil, gerade in der freien Luft werden bei der plötzlichen Ausbreitung der aus einem Resonator kommenden Bewegungen in der Nähe der Resonatoröffnung sehr verwickelte Verhältnisse eintreten.

Berlin, Juli 1887.

XI. Die Dissociation des Kupfervitriols in höherer Temperatur; von W. Müller-Erbach.

In einer früheren Abhandlung¹⁾ hatte ich mitgetheilt, dass in einem andauernd trocken gehaltenen Raume der Kupfervitriol bei gewöhnlicher Temperatur alles Krystallwasser bis auf ein Molecül verdunsten lässt, und aus dem verschiedenen Dampfdruck des verdunstenden Wassers hatte ich gefolgert, dass die 5 Wassermoleküle vier verschiedene Grade der Anziehung innerhalb des Salzes erkennen lassen, wie es durch die Formel:



ausgedrückt wird.

Später hat dann Lescoeur²⁾ die Dissociationsspannung desselben Salzes in höherer Temperatur barometrisch gemessen und mit den meinigen im allgemeinen übereinstimmende Resultate gefunden. Nur weicht er darin ab, dass er, wenigstens bei 78°, keinen Unterschied zwischen den Salzen $\text{CuSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$ und $\text{CuSO}_4 + 3\text{H}_2\text{O}$ beobachten kann, während er für 45° noch eine Differenz im Spannungsdrucke beider von 16 Proc. angibt. Ich habe nun nach meiner

1) Müller-Erbach, Berl. Ber. 20. p. 371. 1887.

2) Lescoeur, Compt. rend. 102. p. 1466. 1886.

Versuchs- temperatur t_1	Relative Spannung	Absolute Spannung	Temperatur t_2	$t_1 - t_2$
-------------------------------	----------------------	----------------------	------------------	-------------

A. $\text{CuSO}_4 + 2$ bis $3 \text{ H}_2\text{O}$.

52,5°	0,08	8,3	8,5°	44,0
53,1	0,094	9,1	99	43,2
56,9	0,15	19,2	21,6	35,3
68,0	0,16	34,1	31,4	36,6
83,2	0,20	81,1	47,5	35,7
85,7	0,216	96,1	50,9	34,8

B. $\text{CuSO}_4 + 1$ bis $2 \text{ H}_2\text{O}$.

45,2	0,062	4,5	0,3	45,5
50,0	0,072	6,6	5,1	44,9
70,9	0,146	24,4	25,6	44,7
73,9	0,155	42,6	35,3	38,6
75,2	0,15	43,7	35,8	39,4
80,3	0,21	75,6	46,1	34,2

Dass die Spannungen in beiden Reihen bei den angewandten Temperaturen nicht wesentlich verschieden sind, geht aus den im Verhältnisse zu der Schwierigkeit der Messungen ziemlich gut übereinstimmenden Werthen von $t_1 - t_2$ hervor. Das aus Wasserdampf gebildete Salz zeigte sich für das zweite und dritte Wassermolecül dem gewöhnlichen Kupfervitriol viel ähnlicher als für grösseren Wassergehalt, doch waren auch hier die Spannungen durchschnittlich etwas höher. Da ein wesentlicher Unterschied zwischen dem zweiten und dritten Wassermolecül nirgends zu erkennen war, so sind die Versuche nicht weiter voneinander getrennt und nur nach steigender Temperatur zusammengestellt.

Versuchs- temperatur t_1	Relative Spannung	Absolute Spannung	Temperatur t_2	$t_1 - t_2$
35,2°	0,04	1,7 mm	-12,7°	47,9
38,0	0,05	2,5 „	- 7,8	45,8
43,0	0,09	5,9 „	3,5	39,5
43,9	0,09	6 „	3,8	40,1
49,8	0,12	10,9 „	12,6	37,2
51,3	0,11	10,8 „	12,5	38,8
70,3	0,23	54,3 „	39,8	30,5

Am grössten ist die Abweichung für 70,3° mit der relativen Spannung 0,23, während das gewöhnliche Salz für 80,3° erst eine solche von 0,21 ergab. Von der Verbindung $\text{CuSO}_4 + 3$ bis $5 \text{ H}_2\text{O}$ erweist sich diejenige mit 1 bis $3 \text{ H}_2\text{O}$ bei dem aus Wasserdampf erhaltenen Salze ebenso verschieden, wie bei den pulverisirten Krystallen. Das in der Ver-

Länge $a = 289$ mm			
$P_{\text{em-g-sec}}$	v mm	$J \cdot 10^8$ Amp.	h
Methylalkohol ($\varphi = 1^\circ 9'$)			
ganze Länge			
17,06	22	129	0,000 022 3
24,07	32	171	0,000 023 0
29,54	47	199	0,000 027 5
34,12	50	224	0,000 025 3
Mittel			0,000 024 4
Aethylalkohol ($\varphi = 1^\circ 9'$)			
ganze Länge			
17,06	15	34	0,000 015 2
24,07	22,5	45	0,000 016 1
29,54	29,5	56	0,000 016 8
34,12	36	67	0,000 016 2
38,15	37	70	0,000 016 7
Mittel			0,000 016 5

Die Steighöhe ergab sich also proportional den Potentialdifferenzen. Sie blieb dieselbe, ging der Strom durch die ganze oder halbe Länge der Röhre. Die Constante b hat Hr. Quincke bei gewöhnlichem, deutschem Glas nahezu gleich gross gefunden:

für Wasser 0,000 055 bis 0,000 067
„ Aethylalkohol . . 0,000 034.

Der Widerstand der Flüssigkeiten änderte sich während der Versuche sehr merklich. Im Mittel betrug derselbe bei:

	Widerstand d. ganzen Flüssigkeitssäule	Spec. Widerst. Hg = 1
Wasser . . .	$319 \cdot 10^7$ Ohms	$4722 \cdot 10^6$
Methylalkohol .	$430 \cdot 10^7$ „	$6365 \cdot 10^6$
Aethylalkohol .	$1570 \cdot 10^7$ „	$23350 \cdot 10^6$

Wurden grössere Kräfte benutzt, so zeigte Wasser eine plötzliche Aenderung des Widerstandes, sobald die electrische Kraft P/a in der Flüssigkeit einen bestimmten Grenzwert überschritt: die Ablenkung der Multiplicatornadel nahm bedeutend zu, während das Electrometer eine plötzliche

silberlicht wegen seiner grossen Helligkeit, Homogenität und der Empfindlichkeit des Auges für diese Strahlen mittlerer Brechbarkeit.

Apparate.

A. Die Lichtquellen.

1. **Farbige Flammen.** Ein Haupterforderniss bei den folgenden Untersuchungen war, die Bedingungen, unter denen die Lichtentwicklung standfand, möglichst constant zu erhalten. Dies ist bei der gewöhnlichen Methode der Flammenfärbung mittelst einer an einen Platindraht angeschmolzenen Salzperle nicht in dem erforderlichen Grade der Fall, weil, namentlich bei leichter flüchtigen Salzen, nie eine constante Dampfmenge geliefert wird. Hier, wie in allen Fällen, wo es sich um quantitative Bestimmungen handelt, war daher ein anderer Weg einzuschlagen.

Sehr zweckmässig erwies sich das von Gouy¹⁾ angewandte Princip, die Metallsalze zu lösen, die Lösungen zu zerstäuben und so der zur Verbrennung des Leuchtgases im Bunsenbrenner verwendeten Luft beizumengen. Die Flamme nimmt dadurch in ihrem oberen Theile eine völlig gleichmässige Färbung an, ohne sich zu deformiren, wie dies bei directem Einblasen der Salzlösung unvermeidlich ist; ausserdem gelangt in gleichen Zeiten bei ein und derselben Lösung immer dieselbe Menge Substanz in die Flamme.

Der von mir benutzte Apparat ist in Fig. 1 in seiner Gesamtanordnung dargestellt, die Fig. 1_a und 1_b geben eine vergrösserte schematische Darstellung des von mir verwendeten Zerstäubers und Brenners.

Durch zwei Knaben wurde mittelst der beiden Gummi-gebläse A_1 und A_2 mit vorgelegten Gummireservoirs in Netz, B_1 und B_2 , Luft in den ca. 50 l haltenden Glasballon C hineingetrieben.²⁾ Durch Vorlegen dieses Ballons wurde die

1) Gouy, Ann. de chim. et de phys. (5) 18. p. 28. 1879; Beibl. 2. p. 341. 1878; 4. p. 376. 1880.

2) Die gewöhnlichen Blasvorrichtungen, z. B. die Blasebälge der Laboratoriumglasblasetische, geben wohl eine hinreichend grosse Luftmenge,

Tabelle I.

Nr. des Absorptions- glases	Extinction		Nr. des Absorptions- glases	Extinction	
1.	71,3	$\frac{1}{1,4}$	7.	10,4	$\frac{1}{9,6}$
2.	54,4	$\frac{1}{1,9}$	8.	8,4	$\frac{1}{12}$
3.	29,4	$\frac{1}{3,4}$	9.	5,7	$\frac{1}{17,5}$
4.	18,0	$\frac{1}{5,5}$	10.	4,0	$\frac{1}{25}$
5.	15,0	$\frac{1}{6,7}$	11.	2,9	$\frac{1}{34,3}$
6.	11,2	$\frac{1}{9}$	12.	2,6	$\frac{1}{38,4}$

C. Der Interferenzenapparat.

Aus dem p. 339 angegebenen Grunde wurden die Interferenzen an schwach keilförmigen Glasplatten erzeugt. Es stand mir eine Reihe von sieben solcher Platten zur Verfügung, von denen ich vier aus einer grösseren Auswahl von Planparallelgläsern ausgesucht hatte; die übrigen drei waren mit bestimmten Keilwinkeln bestellt und in der optisch-astronomischen Anstalt von C. A. Steinheil Söhne in vorzüglichster Weise geschliffen worden, wofür ich den genannten Herren hier nochmals meinen Dank sage.

Die folgende Tabelle II (p. 362) gibt die Constanten der einzelnen Platten.

Die Dicken wurden mit einem Dickenmesser von Hermann und Pfister, der die halben Hundertel Millimeter direct messen, die halben Tausendtel Millimeter aber noch bequem schätzen liess, bestimmt; die Streifenabstände sind auf den Platten bei dem Lichte der grünen Quecksilberlinie gemessen, und daraus die Keilwinkel nach der Formel:

$$\alpha'' = \frac{56,310}{n_{\text{Hg}\alpha}} \cdot \frac{1}{\Delta^{\text{mm}}}$$

berechnet worden.

wurde. Durch eine Linse wurde auf einem unmittelbar vor dem Insulationsgefäss befindlichen doppelten Metallschirm ein Bild der Flamme so entworfen, dass nur die von dem mittleren, am ruhigsten brennenden Theile derselben ausgehenden Strahlen durch eine Oeffnung des Schirms auf das Insulationsgefäss fielen. Das gesammte Glas des Apparates war von aussen durch Lack geschwärzt und mit schwarzer Watte umhüllt, nur derjenige Theil des Insulationsgefässes, welcher das zu bestrahlende Gas enthielt, blieb durchsichtig, war aber durch geeignete Schutzvorrichtungen gegen Luftströmungen und fremde Strahlung geschützt; die Petroleumlampe befand sich in einem nur mit Luftlöchern und einer Oeffnung für das austretende Licht versehenen schwarzen Pappschornstein.

§ 8. Bei dem oben erwähnten Versuche bestand das Gefäss *J* aus einer 128 mm langen Glasröhre von 20 mm Durchmesser, die durch zwei aufgeschliffene, mit Hülfe eines Messinggestänges fest angedrückte Glasplatten geschlossen war. Das Licht der Petroleumlampe ging durch eine grüne Glasplatte hindurch, die von den sichtbaren Strahlen das äusserste Violett und das äusserste Roth vollständig absorbirte, alle übrigen Farben des Spectrums sehr geschwächt hindurchliess.

Der Verlauf des Versuches ergibt sich aus der folgenden Tabelle:

Versuch A.

Zeit in Minuten	Gebildete Salzsäure	Zeit	Salzsäure	Zeit	Salzsäure
1	0	12	0	23	3
2	0	13	0	24	4,5
3	0	14	0	25	5
4	0	15	0	26	3
5	0	16	0	27	2
6	0	17	0	28	2
7	0	18	0	29	5
8	0	19	0	30	10
9	0	20	1	31	14
10	0	21	2	32	22
11	0	22	2,5	33	24*

Der * bedeutet, dass von der betreffenden Stelle ab die Wirkung constant ist.

Versuchsreihe C.

Zeit in Minuten	Nr. 1 _a	Nr. 2 _a	Nr. 1 _b	Nr. 2 _b	1	2
	Blaue Lösung	Rothe Lösung	Blaue Lösung	Rothe Lösung	Mittel aus 1 _a und 1 _b . Blaue Lös.	Mittel aus 2 _a und 2 _b Rothe Lös.
1	0	1	0	1	0	1
2	3	4	4	3	3,5	3,5
3	5	6	3	5	4	5,5
4	15	11	22	12	18,5	11,5
5	27	24	27	24	27	24
6	36	35	34	34	35	34,5
7	38	40*	36	37	37	38,5
8	40*	40	40*	40*	40*	40*
9	40	40	40	40	40	40

Dieselben Versuche wurden darauf mit stärker concentrirten Lösungen vorgenommen, um eine längere Inductions-
dauer beobachten zu können.

Dabei ergab sich die

Versuchsreihe D.

Zeit in Minuten	Nr. 2 _a	Nr. 1	Nr. 2 _b	2
	Rothe Lösung	Blaue Lösung	Rothe Lösung	Mittel aus 2 _a u. 2 _b Rothe Lösung
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	1	2	1	1
4	5	5	5	5
5	9	9	10	9,5
6	14	14	16	15
7	22	23	23	22,5
8	26*	26*	26*	26*

Diese Versuche zeigen eine so gute Uebereinstimmung im Verlaufe der Induction bei Anwendung verschiedenfarbigen Lichtes, dass wir den Satz als bewiesen annehmen können:

Der Verlauf der photochemischen Induction ist unabhängig von der Farbe und nur abhängig von der chemischen Intensität des wirkenden Lichtes.

Durch diesen Satz wird es sehr wahrscheinlich, dass die photochemische Induction nicht in einer Eigenthümlichkeit

Wirkung einer gewissen Zeit bis zu ihrem Eintreten bedarf, dass also auch hier eine Induction stattfindet und im ersten Momente der Bestrahlung keine Salzsäure gebildet wird.

Es muss aber möglich sein, bei derselben plötzlichen Bestrahlung eine messbare Salzsäurebildung zu erzielen, wenn man das Gas vorher in den Zustand höherer Induction versetzt. Zu diesem Zwecke wurde der Versuch in der Weise angestellt, dass man das Gas zunächst durch das Licht der Lampe stark inducirte, darauf wiederum beschattete und dann die momentane Bestrahlung eintreten liess, sobald der Index zur Ruhe gekommen war. Dabei ergab sich die

Versuchsreihe F.

	I.			
Nr.	1	2	3	Mittel
Erster Ausschlag	2	3	1	2
Gebildete Salzsäure	2	1	1	1,3

Eine Wiederholung dieser Versuche an einem späteren Tage ergab die

Versuchsreihe E.

	II.											
Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Mittel
Erster Ausschlag	2	3	1	2	2	1	3	3	3	2	2	2,2
Gebildete Salzsäure	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

und

Versuchsreihe F.

	II.					
Nr.	1	2	3	4	5	Mittel
Erster Ausschlag	1	3	2	2	2	2
Gebildete Salzsäure	1	1	1	1	1	1

Bei diesen Versuchen war es höchst auffallend, dass der erste Ausschlag bei dem nicht inducirten Gase fast genau ebenso gross, jedenfalls nicht kleiner war, als bei dem inducirten, während im ersten Falle die gebildete Salzsäuremenge Null, im zweiten mehr als einen Scalentheil betrug.

Dass die Zahlen der ersten Horizontalreihe einer jeden Tabelle nicht genau übereinstimmen, hat seinen Grund wohl weniger in Fehlern des Capillarrohrs, als vielmehr in der

Versuchsreihe E.

III.						
Nr.	1	2	3	4	5	Mittel
Erster Ausschlag	6	8	4	6	5	5,8
Gebildete Salzsäure	0	1	0	1	1	0,6

Ferner wurde das Gasgemenge mit Hülfe der Petroleumlampe inducirt, darauf beschattet und die Wirkung eines electrischen Funkens beobachtet, welchen man überspringen liess, sobald der Wasserindex zur Ruhe gekommen war.

Dabei ergab sich die

Versuchsreihe F.

III.			
Nr.	1	2	Mittel
Erster Ausschlag	4	4	4
Gebildete Salzsäure	5	5	5

Mithin werden auch bei dieser noch viel kürzeren Bestrahlungszeit und bedeutend grösseren Lichtintensität die vorigen Resultate vollkommen bestätigt.

§ 14. Um den Verlauf der Induction bei schneller Aufeinanderfolge momentaner Bestrahlungen zu untersuchen, wurde abwechselnd die Wirkung von 1, 2 und 3 Funken beobachtet, die man in möglichst kurzen Intervallen hintereinander zwischen den Kugeln des Funkenmikrometers überspringen liess. Um die bei einem jeden Versuche erzeugte Induction des Gases bis zum Beginn der nächsten Beobachtung wieder aufzuheben, genügte nach den Versuchen mit 1, 2 und 3 Schlägen eine Pause von resp. 1, 3 und 6 Minuten. Bei den Versuchen mit zwei und mehr hintereinanderfolgenden Funken konnte nicht die chemische Wirkung eines jeden einzelnen Schlages, sondern nur die gesammte im Laufe des betreffenden Versuchs gebildete Salzsäuremenge gemessen werden, da der Wasserindex des Capillarrohres noch infolge einer electrischen Entladung in Bewegung war, wenn schon der neue Schlag erfolgte. Dagegen konnte man die plötzliche Ausdehnung des Gases bei jedem einzelnen Schlage beobachten, da dieselbe fast momentan vor sich geht, während die durch Absorption der gebildeten Salzsäure eintre-

und etwa doppelt so gross war, als der des alten; gleichzeitig wurde die Intensität und Länge der Funken bei Anwendung vier grosser Leydener Flaschen bedeutend vergrössert.

Es ergab sich die

Versuchsreihe G.

5.2

7

8

9

10

11

12

Daraus folgt als

Gang der Induction.

	III.			IV.		
	Schlag 1	Schlag 2	Schlag 3	Schlag 1	Schlag 2	Schlag 3
Salzsäure	4,5	5,9	5,8	8,4	6,7	8,9

Durch Beobachtung der Wirkung von 1 bis 4 rasch aufeinander folgender Funken fand sich die

III. *Nachtrag zur Abhandlung*¹⁾:
„Versuch einer Dispersionserklärung etc.“;
von Franz Koláček.

1. In obiger Abhandlung (l. c. p. 235) ist für die Grenzfläche zweier verschiedener Media eine Bedingungsgleichung hergeleitet worden, der keine allgemeine Gültigkeit zukommt. Es lag die Aufgabe vor, ξ , η , ζ so zu bestimmen, dass der Gleichungensatz:

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta \xi = 4\pi\mu \frac{du}{\partial t}, & \Delta \eta = 4\pi\mu \frac{dv}{\partial t}, & \Delta \zeta = 4\pi\mu \frac{dw}{\partial t}, \\ \frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{d\zeta}{dz} \end{cases}$$

befriedigt werde.

Irrthümlicher Weise wurden Ausdrücke wie:

$$\xi = -\Sigma \mu \int d\tau \frac{dv}{\partial t} \cdot \frac{1}{r}$$

als allgemein gültige Integrale angenommen, und daraus die Bedingung $u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz = 0$ hergeleitet. Diese Grenzbedingung ist nicht allgemein gültig, weil sich für ξ , η , ζ Ausdrücke angeben lassen, welche die Gleichungen ohne jeden Vorbehalt befriedigen. Versteht man unter λ' μ' ν' die magnetischen Momente in der Volumeneinheit, führt man vorderhand die beschränkende Annahme, dass diese Momente den magnetischen Kräften α β γ proportional seien, nicht ein, so ergibt das Faraday-Maxwell'sche Inductionsprincip Gleichungen von der Form:

$$\frac{dH}{\partial y} - \frac{dG}{\partial z} = \alpha + 4\pi\lambda' \text{ etc.},$$

welche mit Rücksicht auf die Definitionsgleichungen $4\pi u = d\gamma/dy - d\beta/dz$ etc. übergehen in:

$$\Delta \xi = 4\pi \frac{du}{\partial t} + 4\pi \frac{d}{dt} \left(\frac{d\nu'}{\partial y} - \frac{d\mu'}{\partial z} \right) \text{ etc.}$$

Diesen Gleichungen, sowie der Bedingung $d\xi/dx + d\eta/dy + d\zeta/dz = 0$ genügen Ausdrücke, wie:

$$\xi = -\Sigma \int \frac{du}{\partial t} d\tau \cdot \frac{1}{r} + \frac{dM}{\partial z} - \frac{dN}{\partial y},$$

¹⁾ Koláček, Wied. Ann. 32. p. 224. 1887.

schreibe für: $\int (\Delta \xi \delta \zeta + \Delta \eta \delta \eta + \Delta \zeta \delta \zeta) d\tau \dots \sum_{m=1} \Psi_m \delta \varphi_m$,

berücksichtige die Unabhängigkeit der Grössen $\delta \varphi$. So folgt die Gleichungenreihe $m = 1, 2 \dots$

$$(III) \quad K\mu \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}_m} \right) - \frac{dT}{d\varphi_m} \right] + \frac{4\pi\mu}{k} \frac{dT}{d\dot{\varphi}_m} = \Psi_m.$$

Periodische Bewegungen, die von der Amplitude unabhängig sind, treten ein, wenn Ψ_m eine lineare Function der Grössen φ , und T von φ unabhängig ist. Letzteres deutet darauf hin, dass $\xi \eta \zeta$ lineare Functionen der φ sein müssen, sodass gilt:

$$(III_a) \quad \xi = \sum \varphi_m f_m, \quad \eta = \sum \varphi_m g_m, \quad \zeta = \sum \varphi_m h_m,$$

wobei $f_m g_m h_m$ nur noch von xyz abhängen kann.

Sollen selbständige Schwingungstypen vorkommen, so, dass das Einleiten einer Partialschwingung das Auftreten anderer nicht nach sich zieht, so muss $b_{12} = b_{13} = b_{23} \dots = 0$ sein, während noch ist:

$$\Phi_1 = \alpha_1 \varphi_1, \quad \Phi_2 = \alpha_2 \varphi_2 \dots, \quad \Phi_m = \alpha_m \varphi_m.$$

Die Gl. (III) geht dann über in:

$$(IV) \quad K\mu \frac{d^2 \varphi_m}{dt^2} + \frac{4\pi\mu}{k} \frac{d\varphi_m}{dt} = \frac{\alpha_m}{b_{mm}} \varphi_m.$$

Setzt man (III_a) in (II) ein, so gewinnt man zur Beurteilung des geometrischen Charakters der allgemeinen Coordinaten die Gleichungen:

$$(IV_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} K\mu \frac{d^2 \varphi_m}{dt^2} + \frac{4\pi\mu}{k} \frac{d\varphi_m}{dt} = \frac{\Delta f_m}{f_m} = \frac{\Delta g_m}{g_m} = \frac{\Delta h_m}{h_m} = d_m, \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} + \frac{\partial g_m}{\partial y} + \frac{\partial h_m}{\partial z} = 0, \\ f_m \cos nx + g_m \cos ny + h_m \cos nz = 0. \end{array} \right.$$

d_m hängt weder von t , noch von xyz ab, und ist mit Rücksicht auf (IV) der Grösse α_m/b_{mm} gleich. Bildet man mit Hülfe von (III_a) den Ausdruck für $2T$, so folgt wegen $b_{mn} = 0$ die wichtige Relation:

$$(V) \quad 0 = \int d\tau (f_m f_n + g_m g_n + h_m h_n), \quad m \leq n.$$

$$\xi'_m = \sum_{m=1} F_m \psi_m, \quad \eta'_m = \sum_{m=1} \psi'_m G_m, \quad \zeta'_m = \sum_{m=1} \psi_m H_m.$$

Jede der Functionen $F_m G_m H_m$ stellen wir durch eine Reihe nach $f_m g_m h_m$ dar und erhalten so:

$$\begin{aligned} \xi'_m &= \sum_{m=1} f_m [\psi_1 a_{1m} + \psi_2 a_{2m} \dots], \\ \eta'_m &= \sum_{m=1} g_m [\psi_1 a_{1m} + \psi_2 a_{2m} \dots], \\ \zeta'_m &= \sum_{m=1} h_m [\psi_1 a_{1m} + \psi_2 a_{2m} \dots]. \end{aligned}$$

Die Grössen a_{1m} etc. bestimmt man aus:

$$\xi'_m = \sum f_m \Psi'_m, \quad \eta'_m = \sum g_m \Psi'_m, \quad \zeta'_m = \sum h_m \Psi'_m,$$

$$\text{wobei: } A_{mm} \Psi'_m = \int d\tau [f_m \xi'_m + g_m \eta'_m + h_m \zeta'_m]$$

$$\begin{aligned} \text{oder: } A_{mm} \Psi'_m &= \psi_1 \cdot \int d\tau [f_m F_1 + g_m G_1 + h_m H_1] \\ &+ \psi_2 \int d\tau [f_m F_2 + g_m G_2 + h_m H_2] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\text{und } A_{mm} = \int d\tau (f_m^2 + g_m^2 + h_m^2).$$

Daraus folgt:

$$A_{mm} a_{rm} = \int d\tau [f_m F_r + g_m G_r + h_m H_r].$$

Die Grössen a_{rm} hängen vom geometrischen Charakter der allgemeinen Coordinaten, nicht aber davon ab, ob die Gruppe der gleichschwingenden Molecüle durch den Aether erregt wird, oder nicht; auch bleibt ihr Werth ungeändert derselbe, ob wir die Molecüle jedes Leitungsvermögens berauben oder nicht. Thun wir das erstere, $k = \infty$ setzend, denken wir uns ferner die gleichschwingenden Molecüle sich selbst überlassen, also vom umgebenden Aether nicht erregt, so ist für Ψ_m zu setzen $\psi_1 a_{1m} + \psi_2 a_{2m} + \dots = \Psi'_m$. Die Gl. (VI) geht über in:

$$(VI_a) \quad 4\pi\mu \frac{K}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi_m + \Psi'_m) = \psi_m d_m, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Multiplizieren wir rechts und links mit $d(\psi_m + \Psi'_m)/\partial t$ und addiren alle Gleichungen, so steht links ein vollständiges Differential nach der Zeit, rechts aber hat nur ein Addend diese Eigenschaft. Daraus folgt, dass auch:

Dielectricums mit zunehmender Dauer des Stromes ist von sehr vielen Beobachtern bemerkt und verschiedenen Ursachen zugeschrieben worden.

§ 7. Wurde jetzt die Krystallplatte aus dem Kreise der 10 Bunsen ausgeschaltet und durch das vorher beruhigte Galvanometer geschlossen, so zeigte dieses einen bedeutenden, mit der Zeit abnehmenden Rückstrom im Quarz an.

Anfänglicher Ausschlag	.	— 550	Scalenth.
Ablenkung nach	2'	— 15	„
	10	— 9	„
1 Stunde	—	— 4	„
10 Stunden	—	— 1	„

Nach 20 Stunden war dieser dem primären Strom entgegengerichtete Rückstrom — welcher der Polarisationsstrom genannt werden soll — vollständig verschwunden. Während der ganzen Dauer dieses Versuches blieben die Metallbelege der Platte fortwährend durch das Galvanometer geschlossen.

§ 8. Wenn die Quarzplatte, nachdem sie abgekühlt und frisch vergoldet war, wieder wie in § 6 untersucht wurde, so erhielt man nur um wenig geringere Werthe für den anfänglichen Ausschlag und die Ablenkung des Galvanometers wie bei der ersten Untersuchung der Platte. Dazu musste aber der polarisirte Quarz bis zum Verschwinden des Polarisationsstromes entladen werden, was 16—20 Stunden in Anspruch nahm.

§ 9. Die Stärke des Polarisationsstroms, beurtheilt nach dem anfänglichen Ausschlag, ist abhängig von der Zeit, welche zwischen dem Oeffnen des primären und dem Schluss des secundären Kreises verstreicht. Z. B.:

Zeit zwischen dem Oeffnen des primären und Schliessen des secundären Kreises	Anfänglicher Ausschlag durch den Polarisationsstrom
—' 1''	— 475 Scalenth.
— 40	— 310 „
10 —	— 50 „

§ 10. Die Stärke der Polarisation wächst weiter bis zu einer gewissen Grenze mit der Dauer des primären Stromes.

grösse, welche von dem benutzten Galvanometer abhängt, endlich α die Anzahl electrostatischer Einheiten der Electricitätsmenge in einer electromagnetischen Einheit, so hat man:

$$Q = \frac{C \cdot D \cdot V}{\alpha} = a \cdot c \cdot \vartheta \cdot \alpha.$$

C ergibt sich, nach der Kirchhoff'schen Formel¹⁾ berechnet, zu 0,6 cm.

$$\vartheta \text{ ist } 0,77'', \quad c = \frac{6,65}{10^{11}} \quad (\S 4).$$

Setzt man dann:

$$V = 19 \cdot 10^8, \quad \alpha = 30 \cdot 10^9, \quad a = 530,$$

so wird:

$$D = 22200.$$

Nach der Intensität beurtheilt, mit welcher der Polarisationsstrom stundenlang andauert (§ 7), würde sich D unheimlich viel grösser ergeben.

Aus Versuchen, welche den Anspruch erheben, von den Wirkungen der Leitung, sowie der electrischen Absorption oder dielectrischen Nachwirkung frei zu sein, hat man bisher Werthe von D abgeleitet, welche kaum die Zahl 10 für irgend einen Körper übersteigen.

Boltzmann²⁾ und unter seiner Leitung Romich und Nowak³⁾ haben aus Versuchen über die electrostatische Fernwirkung dielectrischer Körper abgeleitet, dass bei gewissen Körpern die electrische Polarisation sehr bedeutend mit der Wirkungszeit der electromotorischen Kraft ansteigt, sodass die Dielectricitätsconstante, beurtheilt nach der in längerer Zeit sich herstellenden Polarisation, zuweilen (z. B. für Quarz) den Werth 1000 überschreitet.

Diese Erscheinung ist von Boltzmann⁴⁾ mit dem Namen der dielectrischen Nachwirkung bezeichnet worden, die

1) G. Kirchhoff, Ges. Abh. p. 112.

2) L. Boltzmann, Wien. Ber. 68. II. p. 21 ff. 1873.

3) Romich u. Nowak, Wien. Ber. 70. II. p. 380. 1874.

4) L. Boltzmann, Wien. Ber. 68. p. 82. 1873.

Polarisation zum Entstehen längere Zeit gebraucht (§ 10) und nach Entfernung der electromotorischen Kraft erst nach längerer Zeit verschwindet (§ 7), entspricht der elastischen Nachwirkung. Die permanente Veränderung unter Wirkung sehr grosser electromotorischer Kräfte (§ 13) entspricht der permanenten Deformation des elastischen Körpers unter Wirkung eines hinreichend äusseren Zwanges.

Auch mit dem Verhalten des Eisens unter Wirkung einer äusseren magnetisirenden Kraft liesse sich eine Parallele ziehen.

§ 17. Ob dem erhitzten Quarz in der Richtung seiner krystallographischen Hauptaxe eine bestimmte Leitungsfähigkeit im Sinne des Ohm'schen Gesetzes zukommt, scheint nach dem Verhalten des permanent veränderten Quarzes sehr zweifelhaft. Für eine Art Leitung spricht die Thatsache, dass die Polarisation des Quarzes bei isolirten Metallbelegungen mit der Zeit abnimmt (§ 9).

§ 18. Ausser dem Quarz sind so viele Krystalle geprüft worden, als für die Untersuchung geeignete aus dem hiesigen mineralogischen Cabinet erhalten werden konnten, nämlich Turmalin, Topas, Kalkspath, Augit, Schwefelzink, Flussspath, Steinsalz, Beryll. Nur am Kalkspath und Augit wurde eine besondere Polarisation wie am Quarz beobachtet. Ueber gewisse Erscheinungen, welche einige der untersuchten Krystalle, insbesondere das Steinsalz darboten, wird bei einer anderen Gelegenheit berichtet werden, sobald an ausreichendem Beobachtungsmaterial die Resultate sicher gestellt sind.

Freiburg i. Br., im August 1887. Phys. Labor.

Wege bestimmt. Die aus dem Gewicht der Salze und ihrer Formeln berechneten Werthe g sind unter g' daneben verzeichnet. Die Unterschiede zwischen g und g' zeigen, dass einzelne der Salze etwas zersetzt sind, indess sind die Abweichungen nicht so bedeutend, dass sie die im Folgenden gezogenen Schlüsse beeinträchtigen können.

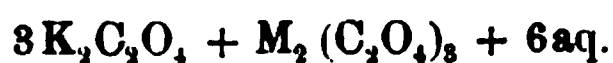
		G	g	g_1	m	α
Eisenchlorid		—	0,3900	—	5479	100
„		—	„	—	5501	100
Chlorpurpureochromchlorid	(J)	2,220	0,6945	0,6961	4174	40,75
„	„	„	„	„	4089	40,05
„	„ (W)	2,873	0,8930	0,9010	5315	40,47
„	„	„	„	„	5319	41,44
Luteochromnitrat	(J)	2,163	0,4849	0,4857	2858	40,15
„	„	„	„	„	2900	40,65
Xanthochromchlorid	(W)	2,713	0,8287	0,7872	5030	41,26
„	„	„	„	„	5069	41,59
Erythrochromnitrat	(J)	2,140	0,4991	0,5273	2588	35,25
„	„	„	„	„	2656	36,16
Rhodochromchlorid	(J)	1,481	0,4679	0,4649	2208	32,08
„	„	„	„	„	2134	30,99
„	„ (W)	1,880	0,5840	0,5902	2844	33,06
„	„	„	„	„	2760	32,95

So ergeben sich im Mittel die folgenden Atommagnetismen für die verschiedenen Salze:

		α
Chlorpurpureochromchlorid	$\text{Cl}_2 (\text{Cr}_2 10 \text{NH}_3) \text{Cl}$	40,68
Luteochromchlorid	$\text{Cr}_2 (12 \text{NH}_3) (\text{NO}_3)_3 2 \text{H}_2\text{O}$	40,80
Xanthochromchlorid	$(\text{NO}_2)_2 \text{Cr}_2 (10 \text{NH}_3) \text{Cl}_4$	41,42
Erythrochromnitrat	$\left. \begin{matrix} \text{OH} \\ \text{NO}_3 \end{matrix} \right\} \text{Cr}_2 (10 \text{NH}_3) (\text{NO})_4 \text{H}_2\text{O}$	35,70
Rhodochromchlorid	$\left. \begin{matrix} \text{OH} \\ \text{Cl} \end{matrix} \right\} \text{Cr}_2 (10 \text{NH}_3) \text{Cl}_4, \text{H}_2\text{O}$	32,27

Hiernach hat in den drei erstgenannten Salzen das Chrom nahezu den gleichen Atommagnetismus, wie in den gewöhnlichen Chromoxydsalzen (41,9), und man würde sie nach ihrem magnetischen Verhalten als Verbindungen von gewöhnlichen Chromoxydsalzen mit Ammoniak auffassen können. Die Abweichungen in den Zahlen sind nicht grösser, als sonst bei anderen festen und gelösten Salzen. Der Magnetismus der beiden anderen Verbindungen, der Erythro- und Rhodochromsalze, ist dagegen bedeutend vermindert. Dabei

Oxalsaure Doppelsalze.



(M = Fe, Mn, Cr, Co).

	M	M_1	T	const. $\frac{T}{M_1^2}$
Oxalsaures Manganoxyd-Kali .	360,5	175	76	2483
	225	111	80,5	2476
Oxalsaures Eisenoxyd-Kali .	372	179,9	125	3859
	226	111,5	47,3	3806
Oxalsaures Cobaltoxyd-Kali .	373	181,0	3	1630
Oxalsaures Chromoxyd-Kali .	369,5	178,9	52,7	1646
	224	110,5	20,5	1680
Mohr'sches Salz	368,5	178,4	113,3	3559
	223,5	110,2	44	3621
Lösung von Eisenchlorid . .	364,5	176,5	61,3	1974
	222,5	109,7	24	1990
Kolben voll Wasser	363	175,9	0,7	23
Kolben voll schwefels. Kali .	359	174,0	1	33
Kolben voll schwefels. Ammon	366	177,3	1,1	32
Kolben leer	361	175	3	98

Bezeichnet γ das Gewicht des in dem verwendeten Salze enthaltenen Metalls, so ergibt sich unter sonstiger Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

	G	γ	m	α
Eisenchlorid	—	0,2145	1951	100
	—	—	1967	100
Oxalsaures Manganoxyd-Kali .	3,223	0,3615	2385	70,96
	—	—	2378	70,20
Oxalsaures Eisenoxyd-Kali . .	3,501	0,3393	3761	103,5
	—	—	3708	101,3
Oxalsaures Cobaltoxyd-Kali .	3,189	0,3786	fast 0	fast 0
Oxalsaures Chromoxyd-Kali .	3,628	0,3899	1548	40,82
	—	—	1582	41,39
Mohr'sches Salz	3,189	0,4558	3461	83,43
	—	—	3525	84,33

Hieraus folgen endlich die mittleren Atommagnetismen des Metalls für die untersuchten Salze:

	α
Eisenchlorid	100
Oxalsaures Manganoxyd-Kali . .	70,58
Oxalsaures Eisenoxyd-Kali . . .	102,4
Oxalsaures Cobaltoxyd-Kali . .	0
Oxalsaures Chromoxyd-Kali . .	41,10
Mohr'sches Salz	83,88

Danach werden die Atommagnetismen des Metalls im:

	α
Eisenchlorid	100
Manganfluorkalium	43,25
Ferrifluorkalium	88,48

Nicht nur der Atommagnetismus des Eisens in der Fluorverbindung ist also wesentlich unter den normalen Werth herabgedrückt, wie dies auch bei anderen festen Salzen vorkommt, sondern noch mehr der des Mangans, wobei sich bestimmte Beziehungen zu dem Verhalten der gewöhnlichen Oxyd- und Oxydulsalze oder der erwähnten oxalsauren Salze nicht herausstellen.

Es dürfte beim gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse kaum möglich sein, die Ursachen anzugeben, weshalb die innerhalb so weiter Grenzen gültigen Regelmässigkeiten in dem magnetischen Verhalten der chemischen Verbindungen bei den zuletzt untersuchten Salzen Ausnahmen erleiden. Indess möchte darauf hinzuweisen sein, dass Cobaltoxyd und Manganoxyd mit den gewöhnlichen Säuren kaum Salze liefern, die basischen Eigenschaften derselben also sehr gering sind, und demgemäss auch die oxalsauren Doppelsalze und Doppelfluoride sich sehr leicht durch Wasser u. s. f. zersetzen. Dieses letztere, schon den Eisenoxysalzen eigenthümliche Verhalten, welches sich in der Bildung des relativ schwach magnetischen, colloid gelösten Eisenoxyds in ihren Lösungen kund gibt, ist also bei ihnen in noch viel höherem Grade vorhanden. Es ist nicht unmöglich, dass analoge Verhältnisse auch schon in den festen wasserhaltigen Salzen bestehen könnten, worauf sich dann der geringe Werth des Atommagnetismus ihres Metalls zurückführen liesse.

constanten, die bisher nur in derjenigen Gleichung eine Rolle spielten, für die sie eingeführt waren, mit den allgemeinen thermodynamischen Eigenschaften der betreffenden Stoffe stehen. Dieser Zusammenhang ermöglicht es, den Begriff der Avidität in absolutem Sinne zu definiren, er vermittelt auch den Aufschluss über den Einfluss, welchen Temperatur und Druck auf den Eintritt einer Reaction haben. Schliesslich werden noch die nicht wenig zahlreichen scheinbaren Abweichungen besprochen, welche sich bei der Prüfung der Guldberg-Waage'schen Theorie durch die Erfahrung herausstellen, und die bekanntlich vor kurzem van't Hoff veranlasst haben, jener Theorie eine wesentlich modificirte Gestalt zu geben.

I. Abschnitt.

Allgemeine Gleichungen.

Durch jeden in der Natur stattfindenden Process wird die Summe der Entropien aller Körper, welche durch den Process irgendwelche Veränderungen erleiden, vergrößert. Dies ist das Princip der Vermehrung der Entropie, der einzige Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen. Man kann dem Princip noch verschiedene andere Formen geben, aber keine lautet so einfach und gilt so unbeschränkt, als diese. Schon im Jahre 1865 wurde sie von R. Clausius¹⁾, der auch den Namen Entropie erfand, veröffentlicht, während das Verdienst, das Princip zum ersten mal für die Gesetze chemischer Erscheinungen (speciell Dissociation) verwerthet zu haben, unzweifelhaft A. Horstmann²⁾ gebührt. Etwas später hat dann Gibbs in der schon oben erwähnten umfangreichen Abhandlung die Consequenzen des Principis zu einer vollständigen Theorie ausgearbeitet, die jedoch immer noch auf einer ziemlich allgemeinen Stufe stehen geblieben ist. In jüngster Zeit hat P. Duhem³⁾ ein beachtenswerthes Werk herausgegeben, in welchem er, von ähnlichen Gesichts-

1) R. Clausius, Pogg. Ann. 125. p. 353. 1865.

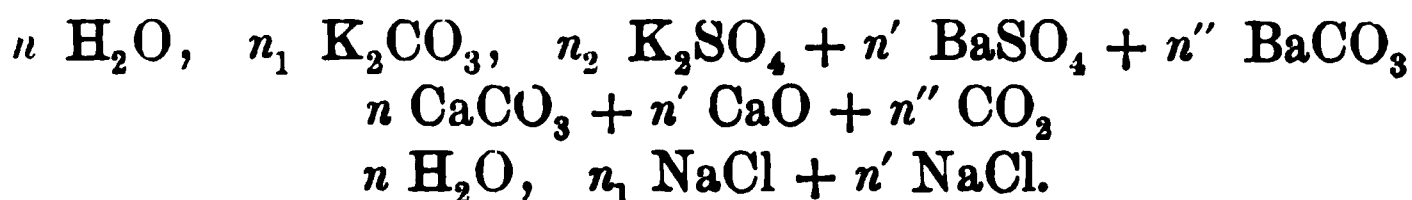
2) A. Horstmann, Lieb. Ann. 170. p. 192. 1873.

3) P. Duhem, Le potentiel thermodynamique et ses applications. Paris, Hermann 1886.

liebig zusammengesetzten homogenen Körpern, die sich gegenseitig berühren, so lässt sich das System offenbar stets durch folgendes Symbol vollständig definiren:

$$nm, n_1 m_1, n_2 m_2, \dots + n' m', n_1' m_1', n_2' m_2', \dots \\ + n'' m'', n_1'' m_1'', \dots$$

Die Grössen m bedeuten wieder die Moleculargewichte, n die Molecülzahlen. Hierbei bilden immer die nur durch ein Komma getrennten Stoffe zusammen einen homogenen Körper, während jedes $+$ Zeichen einem besonderen, von den anderen durch eine bestimmte Berührungsfläche getrennten Körper entspricht. Die einzelnen Körper sind durch Striche, die einzelnen Stoffe innerhalb eines Körpers durch Ziffern unterschieden. Unmittelbar verständlich ist demnach die Bedeutung folgender Symbole:



Der Aggregatzustand eines jeden Körpers wird oft ohne besondere Angabe erkennbar sein; so sind im ersten Beispiel die Bariumsalze fest, im zweiten die Kohlensäure gasförmig, im dritten das Kochsalz (in Berührung mit wässriger Lösung) fest zu denken. Wenn es aber nöthig wird, Zweideutigkeiten zu vermeiden, so kann man sich mit Vortheil der von Ostwald¹⁾ vorgeschlagenen Bezeichnung bedienen, indem die Moleculargewichte fester Körper durch Balkenschrift, flüssiger durch gewöhnliche Schrift, gasförmiger durch Cursivschrift gekennzeichnet werden. Demnach bezeichnet der Ausdruck:



n Molecüle Eis in Berührung mit n' Molecülen flüssigem Wasser und n'' Molecülen Wasserdampf. Aehnlich bedeutet:



eine Lösung von n Molecülen Wasser und n_1 Molecülen Aether in Berührung mit einem Dampfgemisch der beiden Substanzen. Die Anwendung dieser Symbole erleichtert wesent-

1) Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie. 2. p. 28. 1886.

$$\sum \left(\delta S - \frac{\delta U + p \delta V}{\vartheta} \right) > 0.$$

Entropie, Energie und Volumen eines Körpers sind bestimmte Functionen von ϑ , p , n , n_1 , $n_2 \dots$. Daher können wir auch schreiben:

$$\begin{aligned} \sum \delta \vartheta \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} - \frac{\frac{\partial U}{\partial \vartheta} + p \frac{\partial V}{\partial \vartheta}}{\vartheta} \right) + \delta p \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial p} - \frac{\frac{\partial U}{\partial p} + p \frac{\partial V}{\partial p}}{\vartheta} \right) \\ + \delta n \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\frac{\partial U}{\partial n} + p \frac{\partial V}{\partial n}}{\vartheta} \right) + \dots > 0. \end{aligned}$$

In dem Summenglied sind die Coëfficienten von $\delta \vartheta$ und von $\delta p = 0$, weil allgemein:

$$dS = \frac{dU + p dV}{\vartheta},$$

vorausgesetzt, dass die Aenderungen von S , U und V nur durch Temperatur- und Druckänderungen (nicht aber durch solche der Zusammensetzung) hervorgerufen werden. Setzen wir ferner zur Abkürzung die Function¹⁾:

$$S - \frac{U + p \cdot V}{\vartheta} = \Phi,$$

so bleibt übrig die Ungleichung:

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta n + \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \delta n_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \delta n_2 + \dots > 0.$$

Dieselbe lautet in Worten: die Richtung eines Processes, der im System von selber eintritt, ist immer derartig, dass die von den Aenderungen der Grössen n herrührende Veränderung der Function $\sum \Phi$ positiv ist. (Diese Veränderung darf übrigens nicht verwechselt werden mit der totalen Veränderung derselben Function, die ausserdem noch durch $\delta \vartheta$ und δp bedingt ist.)

Hieraus folgt der fruchtbare Satz: Gleichgewicht wird immer dann bestehen, wenn der Zustand des Systems die Bedingung erfüllt, dass für alle denkbaren Veränderungen der Variabeln n die Function $\sum \Phi$ nicht mehr wachsen kann, d. h. ein Maximum besitzt; denn dann kann nach dem vorigen

1) In meinen beiden ersten Abhandlungen habe ich statt Φ die Function $W = \vartheta \cdot \Phi$ benutzt.

ϑ und p betrifft, so geht dieselbe schon aus den allgemeinen Grundsätzen der Thermodynamik hervor und lässt sich so einfach darlegen, dass wir ihre Ableitung noch am Schlusse dieses Abschnitts geben wollen. Nach der Definition p. 469 ist nämlich für irgend einen der homogenen Körper:

$$\begin{aligned} d\Phi &= d\left(S - \frac{U + pV}{\vartheta}\right) \\ &= dS - \frac{dU + p dV}{\vartheta} + \frac{U + pV}{\vartheta^2} \cdot d\vartheta - \frac{V}{\vartheta} \cdot dp. \end{aligned}$$

Lassen wir nun die Änderung von Φ hervorgegangen sein lediglich aus Änderungen von ϑ und p , so ist:

$$dS = \frac{dU + p dV}{\vartheta},$$

folglich:
$$d\Phi = \frac{U + pV}{\vartheta^2} d\vartheta - \frac{V}{\vartheta} dp,$$

und daraus folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{U + pV}{\vartheta^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{V}{\vartheta}.$$

Diese Gleichungen werden uns dazu dienen, die Abhängigkeit des Gleichgewichts von Temperatur und Druck zu bestimmen.

II. Abschnitt.

Körper von constanter Zusammensetzung.

Nehmen wir zunächst den Fall, dass in dem betrachteten System ein oder mehrere Körper von „constanter Zusammensetzung“ vorkommen. (p. 465). Wir bezeichnen als „Körper“ hier, wie durchgängig, nicht die einzelnen chemischen Stoffe, sondern die ganzen zusammengesetzten homogenen Substanzen von bestimmter geometrischer Form und Grösse.) Ein solcher Körper besteht nur aus einer Art von Moleculen (oder Molecülgruppen nach festen Verhältnissen gemengt), seine innere Zusammensetzung ist constant, und sein Zustand hängt ausser von Temperatur und Druck nur von seiner Gesamtmasse ab. Daher gibt es für ihn auch nur ein einziges n , wodurch eben seine Masse bestimmt wird. Da nun die Function Φ nach der allgemeinen Definition

$$s - \frac{u + pv}{\vartheta} = \varphi,$$

so ist nach der Definition p. 469:

$\Phi = n(\varphi - \log C) + n_1(\varphi_1 - \log C_1) + n_2(\varphi_2 - \log C_2) + \dots$
wobei die φ von den Molecülzahlen unabhängig sind.
Folglich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \varphi - \log C, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} = \varphi_1 - \log C_1 \text{ u. s. w.}$$

Dieser Ausdruck von Φ umfasst alle von uns bisher behandelten Fälle. Er gilt ebenso für eine verdünnte Lösung, wie für ein Gemenge vollkommener Gase, wie für einen Körper von constanter Zusammensetzung. Im letzteren Fall hat man nämlich nur $n_1 = n_2 = \dots = 0$ zu setzen und erhält dann $C = 1$, und $\Phi = n\varphi$. Gehen wir daher gleich über zur Betrachtung des allgemeinen Falles. Das System bestehe aus beliebig vielen homogenen, sich berührenden Körpern der betrachteten Art, sein Symbol ist also nach p. 467:

$$nm, n_1 m_1, n_2 m_2 \dots + n' m', n_1' m_1', \dots + n'' m'', n_1'' m_1'', \dots + \dots$$

In diesem System sei irgend eine Zustandsänderung denkbar, von der Form:

$$\delta n : \delta n_1 : \delta n_2 : \dots : \delta n' : \delta n_1' : \dots = \nu : \nu_1 : \nu_2 : \dots : \nu' : \nu_1' : \dots$$

Dann ist das Gleichgewicht vorhanden, wenn nach Gl. (I):

$$\sum \nu (\varphi - \log C) + \nu_1 (\varphi_1 - \log C_1) + \nu_2 (\varphi_2 - \log C_2) + \dots = 0,$$

wobei die Summirung über alle Körper zu erstrecken ist.
Anders geschrieben:

$$(IV) \quad \begin{cases} \sum \nu \log C + \nu_1 \log C_1 + \nu_2 \log C_2 + \dots \\ = \sum \nu \varphi + \nu_1 \varphi_1 + \nu_2 \varphi_2 + \dots \end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung die rechte Gleichungsseite gleich $\log K$ und schreiben statt der Logarithmen die Zahlen, so lautet die Gleichgewichtsgleichung:

$$(IV_a) \quad HC^\nu \cdot C_1^{\nu_1} \cdot C_2^{\nu_2} \dots = K;$$

links ist zu multipliciren über alle Körper des Systems.
 K hängt nicht von den Concentrationen ab.

Sei beispielsweise das Gleichgewicht in dem folgenden System dreier Körper zu bestimmen:

**XI. Notiz zu dem Aufsatz des Hrn. Clausius:
 „Erwiderung auf eine Bemerkung des Hrn. Lor-
 berg in Bezug auf dynamoelectrische Maschinen“¹⁾;
 von H. Lorberg.**

In einem Aufsatz „Ueber die Berechnung der in der Masse des Ringes einer Dynamomaschine inducirten Ströme“²⁾ habe ich diese Ströme, welche, wenn der Ring mit den Windungen fest verbunden ist, theils durch die an den zwei Indifferenzstellen in den Ringwindungen stattfindenden Stromwechsel, theils durch die festen Electromagnete inducirt werden, berechnet. Bezeichnet man mit (x, y, z) oder in Polarcoordinaten mit (ρ, ϑ, z) die Coordinaten eines Punktes des Ringes, mit (x', y', z') die eines Punktes einer Ringwindung, mit $\mp i/2$ die Stromstärke in der ersten, resp. zweiten Windungshälfte, mit n die Anzahl der Windungen (unter Voraussetzung einer einzigen Windungslage), mit h die Tourenzahl; setzt ferner für eine einzelne Ringwindung:

$$(a) \quad F_x = \int \frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} ds' \text{ etc.,}$$

und bezeichnet mit F_x^0 und F_x^π die Werthe von F_x für die Windung $\vartheta = 0$, resp. $\vartheta = \pi$, so ist übereinstimmend nach sämmtlichen bisher aufgestellten Inductionsgesetzen der Mittelwerth der Componenten der durch die Ringwindungen inducirten electromotorischen Kraft:

$$(1) \quad E_x'' = -nhi(F_x^0 + F_x^\pi), \quad E_y'' = 0, \quad E_z'' = -nhi(F_z^0 + F_z^\pi).$$

Wenn dagegen der Ring allein sich drehte, während die Ringwindungen ruhten und keine Stromwechsel hätten, so würden, wenn V_1 das magnetische Potential der gesammten, vom Strom ∓ 1 durchflossenen Ringwindungen bezeichnet, diese electromotorischen Kräfte sein:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = \pi hi \rho \frac{dV_1}{dz} \cos \vartheta, \quad E_y = \pi hi \rho \frac{dV_1}{dz} \sin \vartheta, \\ E_z = -\pi hi \rho \frac{dV_1}{d\rho}. \end{array} \right.$$

1) Clausius, Wied. Ann. 31. p. 302. 1887.

2) Lorberg, Wied. Ann. 30. p. 389. 1887.

Ich hatte, wie schon oben bemerkt, aus dem angeführten Grunde bei Aufstellung der Gleichungen (2) das Weber'sche Inductionsgesetz angewandt. Der Kürze halber will ich als „äquivalente“ Bewegungen des Inducenten und des inducirten Leiters zwei derartige Bewegungen beider bezeichnen, dass, wenn man die eine Bewegung in entgegengesetztem Sinne nimmt, beide sich als ein einziges, unveränderlich verbundenes System bewegen; δ/dt und δ'/dt mögen zeitliche Differentialquotienten bezeichnen, welche sich auf äquivalente Bewegungen des Leiters und des Inducenten beziehen, E_x und E_x' die dadurch erzeugten electromotorischen Kräfte. Die Geschwindigkeitscomponenten in zwei Punkten (x, y, z) und (x', y', z') beider Systeme bei zwei solchen Bewegungen sind, wenn (ξ, η, ζ) die Componenten der Translationsgeschwindigkeit, (α, β, γ) die (im Folgenden als constant betrachteten) Drehungscomponenten um die Coordinatenachsen bezeichnen:

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{\delta x}{dt} = \xi + \beta z - \gamma y, & \frac{\delta y}{dt} = \eta + \gamma x - \alpha z, & \frac{\delta z}{dt} = \zeta + \alpha y - \beta x, \\ \frac{\delta x'}{dt} = -\xi - (\beta z' - \gamma y') \text{ etc.} \end{cases}$$

und wenn r die Entfernung der zwei Punkte bezeichnet, so ist $\delta r/dt = \delta' r/dt$. Nach dem Weber'schen Grundgesetz ist die durch einen Strom i' in einem Punkt (x, y, z) bei einer beliebigen Bewegung beider inducirte electromotorische Kraft:

$$(c) \quad K_x = \int i' ds' \frac{dr}{dx} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dr}{ds'} + \frac{2}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{ds'} \right) \right].$$

Daraus ergibt sich für einen geschlossenen Inducenten, wenn man:

$$(3) \quad \psi = F_x \frac{\delta x}{dt} + F_y \frac{\delta y}{dt} + F_z \frac{\delta z}{dt} \text{ setzt:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} E_x = \int i' ds' \left[\frac{\delta}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{dr}{ds'} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{\delta r}{dt} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \left(\frac{d}{dx} \frac{\delta r}{dt} - \frac{\delta}{dt} \frac{dr}{dx} \right) \right] \\ = -i' \frac{\delta F_x}{dt} + i' (\beta F_z - \gamma F_y) + i' \frac{d\psi}{dx} = b \frac{\delta z}{dt} - c \frac{\delta y}{dt}, \end{cases}$$

Tabelle 54b.

Electrische Zugkräfte
in Luft und in dielectrischen Flüssigkeiten
mit electrischer Wage verglichen.

$O = 58,234 \text{ qcm.} \quad a = 0,1581 \text{ cm.}$

Gewichte		Schrauben-electrometer		Dielectri- citätscon- stante K_p
Luft	Flüssigkeit	Luft	Flüssigkeit	
G_1	G_{11}	$r_0 + r_1$	$r_0 + r_{11}$	
Rapsöl (Landfried) $\sigma = 0,9103$				
gr	gr	rev	rev	
10	25	8,844	8,598	2,683
20	50	12,502	12,340	2,565
"	100	"	17,416	2,531
"	200	"	25,112	2,434
Terpentinöl (Kahlbaum) $\sigma = 0,8612$				
10	22,5	9,145	9,004	2,320
20	45	12,875	12,828	2,266
"	90	"	18,139	2,267
"	180	"	25,892	2,225
"	360	"	36,849	2,197
20	45	12,681	12,666	2,255
"	720	"	50,158	2,301

Tabelle 55d.

Dielectricitätsconstante
aus der Capacität eines Condensators in Luft und in der
dielectrischen Flüssigkeit bestimmt.

Schrauben-electrometer		Multiplicatorausschlag			Dielectricitätsconstante mit		
Luft	Flüssigk.	Luft		Flüssigk.	Multiplic.	Wägung	K_p
$r_0 + r_1$	$r_0 + r_{11}$	s_0	s_1	s_{11}	(K)	K_p	(\overline{K})
Rapsöl (Landfried) $\sigma = 0,9103$							
rev	rev	sc	sc	sc			
8,844	8,844	13,85	90,72	242,1	2,970	2,683	0,903
12,502	12,502	19,36	126,84	339,8	2,982	2,565	0,860
"	25,700	"	"	665	2,830	2,434	0,860
Terpentinöl (Kahlbaum) $\sigma = 0,8612$							
9,064	9,064	14,72	96,88	196,9	2,218	2,320	1,046
12,681	12,681	21,04	137,14	275,4	2,191	2,266	1,035
"	36,849	"	"	780,4	2,132	2,197	1,030
"	45,750	"	"	1000,8	2,208	2,301	1,042

Die Tabellen sind in derselben Weise angeordnet, wie in Tab. 54a und 55a der früheren Mittheilung. Nur wurde bei den Bestimmungen der Capacität jedesmal der Multiplimatorausschlag s , für den Schlüssel und Zuleitungsdraht gemessen, um deren Capacität berücksichtigen und die Constante K , in der oben § 1 angegebenen Weise berechnen zu können.

Ich habe ferner die Dielectricitätsconstante K , für dasselbe Rapsöl nach der dritten Methode bestimmt, indem ich den electricischen Querdruck auf eine Luftblase in dieser Flüssigkeit zwischen horizontalen Condensatorplatten mit einem Manometer in der früher § 53) beschriebenen Weise gemessen habe.¹⁾ Die Manometerflüssigkeit war Schwefelkohlenstoff mit Zusatz von etwas Aether und hatte ein specifisches Gewicht von 1.1837.

Für eine Stellung $r_0 + r_1$ des Schraubenelectrometers wurde die Höhe der Manometerflüssigkeit beobachtet, der Condensator entladen und die Abnahme der Höhendifferenz der Flüssigkeitskuppen im Manometer mit einem Kathetometermikroskop gemessen. Dieselbe ist in der folgenden Tabelle unter h angegeben.

Die obere Condensatorplatte wurde dann durch eine andere gleich grosse Condensatorplatte mit Cardani'scher Auflagerung ersetzt und mit der electricischen Wage § 80) bei gleichem Abstand und gleicher Potentialdifferenz der Condensatorplatten das Gewicht G_2 bestimmt, welches der electricischen Anziehungskraft beider Condensatorplatten in Rapsöl das Gleichgewicht hielt. Findet man ferner für die electricische Anziehung der Condensatorplatten in Luft das Gewicht G_1 bei der Potentialdifferenz $r_0 + r_1$, so ist:

$$5) \quad K_F = \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{r_0 + r_1}{r_0 + r_1} \right)^2,$$

$$6) \quad K = 1 + \frac{h \sigma O}{G_2} K_F,$$

wo O die Oberfläche der Condensatorplatte in Quadratcentimetern und σ das specifische Gewicht der Manometerflüssigkeit bedeutet.

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 721. 1883.

II. *Ueber das Leitungsvermögen der phosphorescirenden Luft; von Svante Arrhenius.*

(Der schwedischen Academie der Wiss. mitgetheilt den 14. Sept. 1887.)

(Hierzu Taf. IV Fig. 1—8)

1. Einleitung; Versuchsmethode.

Die Versuche, worüber unten berichtet wird, sind im physikalischen Institut der Universität Würzburg während des Wintersemesters 1886—1887 ausgeführt. Für die freundliche Unterstützung, welche mir dabei von Seiten des Vorstandes dieses Instituts, Hrn. Prof. Friedrich Kohlrausch, zu Theil geworden ist, erlaube ich mir hier meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Es war meine ursprüngliche Absicht, die unten mitgetheilten Beobachtungen theilweise zu vervollständigen, bevor ich sie veröffentlichte; da aber während der nach der Ausführung meiner Versuche verflossenen Zeit sehr interessante Beobachtungen von den Herren A. Schuster¹⁾ und Hertz²⁾ erschienen, die meine Ansichten bestätigen, so habe ich geglaubt, dass das ursprünglich vorhandene Beweismaterial für die Darstellung der Sachlage genügend ist, und theile es also hier ohne neue Versuche mit.

Bei der Untersuchung über die Verhältnisse beim Durchgang eines electrischen Stromes durch eine Gassäule liegt wohl die grösste Schwierigkeit darin, dass die Gase sich als vollkommene Isolatoren für kleine Potentialdifferenzen zeigen. Inzwischen hat Hittorf³⁾ die Beobachtung gemacht, dass unter gewissen Umständen auch für relativ kleine Potentialdifferenzen eine Gassäule sich als Leiter erweist.⁴⁾ Er fand, dass, wenn ein Strom eine Gas-

1) Schuster, Proc. Roy. Soc. 42. p. 371. 1887.

2) Hertz, Berl. Ber. Jahrg. 1887. p. 487; Wied. Ann. 31. p. 983. 1887.

3) Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 614. 1879; Wiedemann's Electricität. 4. p. 504.

4) Leider hat Hittorf in der citirten Abhandlung keine Zahlen mitgetheilt, um seine Beobachtung zu bekräftigen — es wird nur bemerkt, dass unter einer electromotorischen Kraft von 100 (Bunsen-) Elementen

Nach diesen Erörterungen gebe ich das Beobachtungsmaterial.

2. Beobachtungsdaten.

1. Druck = 7,4 mm.

E. L.: $H = 2$, $i = 1581$.

A. 1.: $H = 2$; $e = 10$, $i = 33$; $e = 20$, $i = 66$; $e = 40$, $i = 126$;

A. 2.: $H = 2$; $e = 40$, $i = 2$.

2. Druck = 4,4 mm.

E. L.: $H = 1$, $i = 752$; $H = 2$, $i = 1581$; $H = 4$, $i = 3101$.

K. 1.: $H = 2$; $e = 20$, $i = 6$; $e = 40$, $i = 7$. $H = 4$; $e = 40$, $i = 9$.

A. 1.: $H = 2$; $e = 10$, $i = 23$; $e = 20$, $i = 41$; $e = 40$, $i = 95$.

$H = 4$; $e = 40$, $i = 195$.

3. Druck = 2 mm.

E. L.: $H = 2$, $i = 1597$.

K. 1.: $H = 2$; $e = 2$, $i = 2$; $e = 10$, $i = 7$; $e = 20$, $i = 16$; $e = 40$, $i = 18$.

A. 1.: $H = 2$; $e = 2$, $i = 4$; $e = 6$, $i = 11$; $e = 10$, $i = 16$; $e = 20$, $i = 22$;
 $e = 40$, $i = 35$.

A. 2.: $H = 2$; $e = 20$, $i = 4$; $e = 40$, $i = 6$.

4. Druck = 1,6 mm.

E. L.: $H = 1$, $i = 745$; $H = 2$, $i = 1562$; $H = 4$, $i = 3100$.

K. 1.: $H = 2$; $e = 10$, $i = 15$; $e = 20$, $i = 23$; $e = 40$, $i = 34$.

K. 1.: $e = 20$; $H = 1$, $i = 16$; $H = 2$, $i = 23$; $H = 4$, $i = 31$.

A. 1.: $H = 2$; $e = 4$, $i = 18$; $e = 10$, $i = 17$; $e = 20$, $i = 33$; $e = 40$, $i = 57$.

A. 1.: $e = 20$; $H = 1$, $i = 17$; $H = 2$, $i = 33$; $H = 4$, $i = 61$.

A. 1.: $e = 40$; $H = 1$, $i = 34$; $H = 2$, $i = 57$; $H = 4$, $i = 94$.

5. Druck = 1,2 mm.

E. L.: $H = 2$, $i = 1581$.

K. 1.: $H = 2$; $e = 10$, $i = 15$; $e = 20$, $i = 26$; $e = 30$, $i = 37$; $e = 40$, $i = 44$.

K. 2.: $H = 2$; $e = 40$, $i = 2$.

K. 4.: $H = 2$; $e = 40$, $i = 16$.

A. 1.: $H = 2$; $e = 10$, $i = 18$; $e = 20$, $i = 26$; $e = 30$, $i = 39$; $e = 40$, $i = 46$.

A. 2.: $H = 2$; $e = 20$, $i = 6$; $e = 40$, $i = 10$.

A. 3.: $H = 2$; $e = 40$, $i = 3$.

A. 4.: $H = 2$; $e = 40$, $i = 17$.

6. Druck = 0,94 mm.

E. L.: $H = 1$, $i = 879$; $H = 2$, $i = 1751$; $H = 4$, $i = 3426$.

K. 1.: $H = 2$; $e = 4$, $i = 25$; $e = 10$, $i = 52$; $e = 20$, $i = 75$; $e = 40$, $i = 108$.

K. 1.: $e = 4$; $H = 1$, $i = 26$; $H = 2$, $i = 25$; $H = 4$, $i = 24$;

$e = 10$; $H = 1$, $i = 56$; $H = 2$, $i = 57$; $H = 4$, $i = 58$.

K. 1.: $e = 40$; $H = 1$, $i = 104$; $H = 2$, $i = 109$; $H = 4$, $i = 114$.

K. 2.: $e = 40$; $H = 1$, $i = 5$; $H = 2$, $i = 7$; $H = 4$, $i = 8$.

7. Druck = 0,81 mm.

E. L: $H = 1, i = 695$; $H = 2, i = 1516$; $H = 4, i = 3100$.

K. 1: $e = 20$; $H = 1, i = 112$; $H = 2, i = 96$; $H = 4, i = 91$;
 $e = 40$; $H = 1, i = 143$; $H = 2, i = 130$; $H = 4, i = 122$.

8. Druck = 0,6 mm.

E. L: $H = 1, i = 733$; $H = 2, i = 1585$; $H = 4, i = 3132$.

K. 1: $e = 4$; $H = 1, i = 108$; $H = 4, i = 88$;
 $e = 10$; $H = 1, i = 192$; $H = 2, i = 168$; $H = 4, i = 172$.

K. 1: $e = 20$; $H = 1, i = 257$; $H = 2, i = 237$; $H = 4, i = 247$;
 $e = 40$; $H = 1, i = 318$; $H = 2, i = 298$; $H = 4, i = 314$.

K. 2: $e = 40$; $H = 1, i = 13$; $H = 2, i = 13$; $H = 4, i = 17$.

9. Druck = 0,46 mm.

E. L: $H = 2, i = 1470$.

K. 1: $H = 2$; $e = 2, i = 77$; $e = 4, i = 135$; $e = 10, i = 248$;
 $e = 20, i = 358$; $e = 30, i = 407$; $e = 40, i = 448$.

K. 2: $H = 2$; $e = 10, i = 6$; $e = 20, i = 10$; $e = 40, i = 16$.

10. Druck = 0,41 mm.

E. L: $H = 1, i = 829$; $H = 2, i = 1608$; $H = 4, i = 3106$.

K. 1: $H = 2$; $e = 0,056, i = 3$; $e = 0,112, i = 6$; $e = 0,224, i = 11$;
 $e = 0,56, i = 28$; $e = 1,12, i = 56$.

K. 1: $H = 2$; $e = 4, i = 170$; $e = 10, i = 304$; $e = 20, i = 402$;
 $e = 30, i = 451$; $e = 40, i = 485$.

K. 1: $e = 0,56$; $H = 1, i = 33$; $H = 2, i = 29$; $H = 4, i = 23$;
 $e = 40$; $H = 1, i = 439$; $H = 2, i = 485$; $H = 4, i = 523$.

K. 2: $H = 2$; $e = 10, i = 13$; $e = 20, i = 19$; $e = 40, i = 27$.

K. 2: $e = 40$; $H = 1, i = 26$; $H = 2, i = 27$; $H = 4, i = 38$.

K. 3: $H = 2$; $e = 20, i = 7$; $e = 40, i = 9$;
 $e = 40$; $H = 1, i = 5$; $H = 2, i = 9$; $H = 4, i = 14$.

K. 4: $e = 40$; $H = 1, i = 28$; $H = 4, i = 47$.

A. 1: $H = 2$; $e = 10, i = 18$; $e = 20, i = 32$; $e = 40, i = 56$;
 $e = 40$; $H = 1, i = 31$; $H = 2, i = 56$; $H = 4, i = 93$.

A. 2: $e = 40$; $H = 1, i = 11$; $H = 4, i = 19$.

A. 4: $e = 40$; $H = 1, i = 7$; $H = 4, i = 28$.

11. Druck = 0,31 mm.

E. L: $H = 1, i = 802$; $H = 2, i = 1547$; $H = 4, i = 3090$.

K. 1: $H = 1$; $e = 2, i = 96$; $e = 6, i = 222$; $e = 20, i = 443$; $e = 40, i = 556$.

K. 1: $H = 2$; $e = 2, i = 117$; $e = 6, i = 269$; $e = 20, i = 552$; $e = 40, i = 694$.

K. 1: $H = 4$; $e = 2, i = 121$; $e = 6, i = 305$; $e = 20, i = 660$; $e = 40, i = 838$.

K. 2: $e = 20$; $H = 1, i = 43$; $H = 2, i = 55$; $H = 4, i = 59$.

$e = 40$; $H = 1, i = 54$; $H = 2, i = 71$; $H = 4, i = 70$.

K. 3: $e = 40$; $H = 1, i = 11$; $H = 2, i = 14$; $H = 4, i = 14$.

$K.3:$ $e = 20; H=2, i=6; H=4, i=12;$
 $e = 40; H=1, i=6; H=2, i=10; H=4, i=21;$
 $e = 10; H=4, i=6.$

18. Druck = 0,022 mm.

$E.L:$ $H = 1, i = 664; H = 2, i = 1290; H = 4, i = 2500.$
 $K.1:$ $e = 20; H=1, i=95; H=2, i=193; H=4, i=375;$
 $e = 40; H=1, i=114; H=2, i=235; H=4, i=503.$
 $K.2:$ $e = 20; H=1, i=57; H=2, i=136; H=4, i=288;$
 $e = 40; H=1, i=114; H=2, i=223; H=4, i=499.$
 $K.4:$ $H = 4; e=40, i=7.$
 $A.1:$ $H = 1; e=10, i=85; e=20, i=72; e=40, i=87;$
 $H = 2; e=40, i=201.$
 $A.1:$ $H = 4; e=2, i=31; e=4, i=58; e=10, i=140;$
 $e=20, i=285; e=40, i=382.$
 $A.2:$ $e = 40; H=1, i=35; H=2, i=85; H=4, i=162.$
 $A.3:$ $e = 40; H=1, i=15; H=2, i=37; H=4, i=91.$
 $A.4:$ $e = 40; H=1, i=57; H=4, i=250.$

19. Druck = 0,01 mm.

$E.L:$ $H = 2, i = 1530.$
 $K.1:$ $H = 2; e=2, i=31; e=4, i=56; e=10, i=103; e=40, i=309.$
 $K.2:$ $H = 2; e=2, i=21; e=4, i=38; e=10, i=88; e=20, i=177;$
 $e=40, i=365.$
 $K.3:$ $H = 2; e=10, i=20; e=20, i=40; e=40, i=78.$
 $A.1:$ $H = 2; e=40, i=276. A.2:$ $H = 2; e=40, i=146.$
 $A.3:$ $H = 2; e=10, i=45; e=20, i=63; e=40, i=73.$

20. Druck = 0,008 mm.

$E.L:$ $H = 1, i = 694; H = 2, i = 1410; H = 4, i = 2850.$
 $K.1:$ $H = 2; e=10, i=8; e=20, i=13; e=40, i=27.$
 $K.2:$ $H = 2; e=2, i=8; e=6, i=21; e=10, i=33;$
 $e=20, i=65; e=30, i=100; e=40, i=132.$
 $K.3:$ $H = 2; e=4, i=7; e=10, i=18; e=20, i=34;$
 $e=30, i=52; e=40, i=67.$
 $K.2:$ $e = 40; H=1, i=67; H=2, i=143; H=4, i=275.$
 $K.3:$ $e = 10; H=1, i=9; H=2, i=17; H=4, i=34;$
 $e = 30; H=1, i=25; H=2, i=50; H=4, i=99.$

21. Druck = 0,003 mm.

$E.L:$ $H = 2, i = 1530.$
 $H = 2: e = 40; K.2, i = 20; K.3, i = 22; A.3, i = 17.$

Die Ausschläge für $K.1$, $A.1$ und $A.2$ waren zu unstetig, um genau gemessen zu werden.

22. Druck = 0,0009 mm.

$E.L:$ $H = 2, i = 1410.$
 $K.3:$ $H = 2; e=40, i=4.$

Für das Potential ergeben sich folgende Endwerthe, und zwar für den Punkt mit den Coordinaten uv im Falle einer rechteckigen Platte:

$$V = -\frac{1}{\pi\lambda\delta} \log \frac{\sigma^2 u \sigma_1^2 v i - \sigma_2^2 u \sigma^2 v i}{\sigma_2^2 u \sigma_2^2 v i - (e_2 - e_3)(e_2 - e_1) \sigma^2 u \sigma^2 v i}.$$

Für den speciellen Fall des Quadrates vereinfacht sich diese Formel auf:

$$V' = -\frac{1}{\pi\lambda\delta} \log \frac{2\sigma^2 u \sigma_2^2 u}{\sigma_2^4 u - e_1^2 \sigma^4 u}.$$

Der Leitungswiderstand, welcher dem Strom durch diejenige Fläche entgegengesetzt wird, welche durch die den Punkten u_1 und u_2 zugehörigen Niveaucurven und durch den Rand des Quadrates begrenzt wird, ist:

$$w = \frac{1}{\pi\lambda\delta} \log \frac{\vartheta_1^2(u_2) \vartheta_3^2(u_2)}{\vartheta_3^4(u_2) - \vartheta_1^4(u_2)} \frac{\vartheta_3^4(u_1) - \vartheta_1^4(u_1)}{\vartheta_1^2(u_1) \vartheta_3^2(u_1)}.$$

Um die Beobachtungsart zu erläutern, möge ein Protocoll für ein Quadrat folgen. Die mit α bezeichnete Grösse ist der Widerstand des Messdrahtes für eine Länge von 1000 mm; die Lage der Punkte gleichen Potentials auf dem Messdrahte und auf der Metallplatte ergeben die mit l und p bezeichneten Columnen; die Zahlen δ der ersten Column geben die Stellung des beweglichen Schlittens gegen das feste, mit einer Millimetertheilung versehene Gestell des Monochords, während die mit Hülfe eines Kathetometers gewonnenen Zahlen der zweiten Column den gegenseitigen Abstand der Punkte $P_1 P_2 \dots$ voneinander und auch von den Zuleitungselectroden angeben; letztere sind in der Tabelle mit 0 und 10 bezeichnet.

Aluminium. Quadrat A. $\alpha = 1,3511$ Siemens.

Temp. 20,1° C.

	l										
Punkt	1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	
	789,8	809,8	826,4	841,9	860,6	888,0	860,4	841,9	826,2	809,9	
Punkt	1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
	789,9	809,9	826,4	842,0	860,7	888,0	860,5	841,9	826,3	809,8	789,8

Temp. 20,2° C.

	p							
Punkt	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	10.
	661,90	692,75	704,55	716,56	728,60	740,55	752,54	783,48
	661,90	692,75	704,54	716,56	728,60	740,55	752,55.	

Die Leitungsfähigkeit des Silbers für die Temperatur t ist, wenn dieselbe bei 0 Grad gleich 100 gesetzt wird, durch folgende Formel¹⁾ gegeben:

$$\lambda_t = 100 - 0,38287 t + 0,0009848 t^2.$$

Hiernach ist bei $23,0^\circ$ $\lambda = 91,71$ oder in Quecksilbereinheiten $\lambda = 55,39$.

Das specifische Gewicht würde sich hier unter Annahme einer beobachteten Leitungsfähigkeit von $\lambda = 45$ unter denselben Voraussetzungen wie bei dem Aluminium auf $s=13,1$ statt auf $s=10,4$, also auf einen etwa 25 Proc. grösseren Werth stellen.

Die folgende Tabelle enthält schliesslich die Resultate, welche sich bei den Untersuchungen der Goldblättchen ergaben.

Gold.

	Quadrat I	Quadrat II	Quadrat III	Quadrat IV
(1,2)	$\lambda\delta = 1,02076$	$\lambda\delta = 0,97741$	$\lambda\delta = 1,05469$	$\lambda\delta = 1,04892$
(1,3)	1,04719	1,06623	1,13244	1,05467
(1,4)	1,11606	1,14303	1,17715	1,12488
(1,5)	1,12812	1,16018	1,15871	1,16331
(1,6)	1,08161	1,12743	1,11800	1,12747
(2,3)	1,08052	1,19867	1,24236	1,06172
(2,4)	1,18443	1,27949	1,26920	1,17861
(2,5)	1,17877	1,25759	1,20785	1,21844
(2,6)	1,10046	1,17631	1,13774	1,15263
(3,4)	1,32159	1,37929	1,29969	1,33749
(3,5)	1,23749	1,29035	1,19053	1,31975
(3,6)	1,10695	1,16947	1,10813	1,18468
(4,5)	1,16790	1,21747	1,10411	1,30366
(4,6)	1,03669	1,10043	1,04455	1,13117
(5,6)	0,95084	1,02188	1,00156	1,02262
Mittel	$\lambda\delta = 1,11729$	$\lambda\delta = 1,17101$	$\lambda\delta = 1,14978$	$\lambda\delta = 1,16200$

Die Zusammenstellung der Mittelwerthe der Leitungsfähigkeit liefert die folgende Tabelle.

Gold.

		Leitungs- fähigkeit	Dicke mm	Gew. d. Platte	wahrsch. Fehler d. Result.	Temp.
Quadrat	I	13,01	0,000 085 9	11,998 mg	0,18603 (1,4%)	16,0° C.
„	II	12,30	0,000 095 2	13,235 „	0,19454 (1,6 „)	15,7
„	III	12,46	0,000 091 5	12,757 „	0,15967 (1,3 „)	14,7
„	IV	13,37	0,000 086 9	12,094 „	0,19781 (1,5 „)	16,9

Die Leitungsfähigkeit des harten Goldes ist unter Zu-

1) Wiedemann, Electricität. 1. p. 508. 1882.

$$(3) \begin{cases} -2F = a_{11}(y_z^2 - 4y_y z_z) + a_{22}(z_x^2 - 4z_z x_x) + a_{33}(x_y^2 - 4x_z y_y) \\ + 2a_{23}(2y_z x_x - y_x z_x) + 2a_{31}(2z_x y_y - z_y x_y) + 2a_{12}(2x_y z_z - x_z y_z). \end{cases}$$

Hr. Kirchhoff¹⁾ hat sich der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, l, m, n$ bedient, um aus diesem allgemeinen Ausdruck für F das sogenannte Elasticitätsellipsoid abzuleiten.

Für die die Energie vermindernenden Kräfte soll angenommen werden, dass für sie ebenfalls drei Symmetrieachsen s_1', s_2', s_3' bestehen, die aber mit den Axen s_1, s_2, s_3 der die Energie erhaltenden Kräfte beliebige Winkel bilden können. Es scheint diese Annahme ebensowenig die Allgemeinheit zu beschränken, wie dies für die Kräfte der letzteren Gattung erwiesen ist. Es sollen ferner die absorbirenden Kräfte denselben Beschränkungen unterworfen werden, wie sie Hr. Voigt in seiner oben citirten Abhandlung über die Absorption in Krystallen angenommen hat, d. h. Kräfte, welche die Arbeit Ψ_1 ²⁾ zu einer negativen Summe von Quadraten machen, werden nicht eingeführt, und unter den Constanten, welche in der Arbeit Ψ_2 auftreten, werden sechs Bedingungsgleichungen³⁾ angenommen, um die Neumann'schen Resultate hinsichtlich der Polarisationssebene zu erhalten. Es treten dann in Ψ_2 nur noch sechs Constanten auf, da vermöge der Incompressibilitätsbedingung die Gleichungen bestehen:

$$x_x^2 = -x_x y_y - x_x z_z, \quad y_y^2 = -y_y x_x - y_y z_z, \quad z_z^2 = -z_z x_x - z_z y_y.^{4)}$$

Bezogen auf die drei Symmetrieachsen als Coordinatenachsen lässt sich dann Ψ_2 in der Form schreiben:

$$(1) \begin{cases} -2\Psi_2 = a' \xi'^2 + b' \eta'^2 + c' \zeta'^2 \\ + a''(y_z'^2 - 4y_y' z_z') + b''(z_x'^2 - 4z_z' x_x') + c''(x_y'^2 - 4x_z' y_y'), \end{cases}$$

wo gesetzt ist:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad x_x' = \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \text{ etc.}$$

$$\xi' = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad \eta' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

1) G. Kirchhoff, l. c. p. 61.

2) W. Voigt, l. c. p. 578.

3) W. Voigt, l. c. p. 585.

4) cf. die citirte Abhandlung p. 580.

$$(4') \begin{cases} 2G' = (a'_{11} + a''_{11}) \xi'^2 + (a'_{22} + a''_{22}) \eta'^2 + (a'_{33} + a''_{33}) \zeta'^2 \\ \quad + 2(a'_{23} + a''_{23}) \eta' \zeta' + 2(a'_{31} + a''_{31}) \zeta' \xi' + 2(a'_{12} + a''_{12}) \xi' \eta', \end{cases}$$

so wird:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} F &= G + 2a_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2a_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\quad + 2a_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + 2a_{23} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &\quad + 2a_{31} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &\quad + 2a_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned} \right.$$

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_2 &= G' + 2a''_{11} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + 2a''_{22} \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial z} \frac{\partial u'}{\partial x} \right) \\ &\quad + 2a''_{33} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \\ &\quad + 2a''_{23} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \\ &\quad + 2a''_{31} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \\ &\quad + 2a''_{12} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z} \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial z} \right). \end{aligned} \right.$$

Ferner folgt:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} Z_x &= -\frac{\partial G}{\partial \eta} + 2a_{22} \frac{\partial u}{\partial z} - 2a_{23} \frac{\partial u}{\partial y} - 2a_{31} \frac{\partial v}{\partial y} - 2a_{12} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ Z_y &= \frac{\partial G}{\partial \xi} + 2a_{11} \frac{\partial v}{\partial z} + 2a_{23} \frac{\partial u}{\partial x} - 2a_{31} \frac{\partial v}{\partial x} - 2a_{12} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ Z_z &= -2a_{11} \frac{\partial v}{\partial y} - 2a_{22} \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \right.$$

andererseits:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} X_z &= \frac{\partial G}{\partial \eta} + 2a_{22} \frac{\partial w}{\partial x} - 2a_{23} \frac{\partial v}{\partial x} + 2a_{31} \frac{\partial v}{\partial y} - 2a_{12} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ Y_z &= -\frac{\partial G}{\partial \xi} + 2a_{11} \frac{\partial w}{\partial y} + 2a_{23} \frac{\partial u}{\partial x} - 2a_{31} \frac{\partial u}{\partial y} - 2a_{12} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ Z_z &= -2a_{11} \frac{\partial v}{\partial y} - 2a_{22} \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right.$$

Analog ergibt sich:

$$(6') \quad \left\{ \begin{array}{l} C_x = -\frac{\partial G'}{\partial \eta'} + 2a''_{23} \frac{\partial u'}{\partial z} - 2a''_{23} \frac{\partial u'}{\partial y} - 2a''_{31} \frac{\partial v'}{\partial y} - 2a''_{12} \frac{\partial v'}{\partial z}, \\ C_y = \frac{\partial G'}{\partial \xi'} + 2a''_{11} \frac{\partial v'}{\partial z} + 2a''_{23} \frac{\partial u'}{\partial x} - 2a''_{31} \frac{\partial v'}{\partial x} - 2a''_{12} \frac{\partial u'}{\partial z}, \\ C_z = -2a''_{11} \frac{\partial v'}{\partial y} - 2a''_{23} \frac{\partial u'}{\partial x} + 2a''_{12} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$

$$(7') \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{\partial G'}{\partial \eta'} + 2a''_{23} \frac{\partial w'}{\partial x} - 2a''_{23} \frac{\partial v'}{\partial x} + 2a''_{31} \frac{\partial v'}{\partial y} - 2a''_{12} \frac{\partial w'}{\partial y}, \\ B_x = -\frac{\partial G'}{\partial \xi'} + 2a''_{11} \frac{\partial w'}{\partial y} + 2a''_{23} \frac{\partial u'}{\partial x} - 2a''_{31} \frac{\partial u'}{\partial y} - 2a''_{12} \frac{\partial w'}{\partial x}, \\ C_x = -2a''_{11} \frac{\partial v'}{\partial y} - 2a''_{23} \frac{\partial u'}{\partial x} + 2a''_{12} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$

Dabei bestehen wohl die Gleichungen:

$$X_z = Z_x, \quad Y_z = X_y, \quad Z_y = Y_z,$$

aber die analogen Gleichungen für die absorbirenden Kräfte:

$$A_z = C_x, \quad B_z = A_y, \quad C_y = B_x$$

gelten nicht, da in Ψ_z nicht nur die Combination $\partial u' / \partial z + \partial w' / \partial x$, sondern auch $\partial u' / \partial z - \partial w' / \partial x$ auftritt.

Benutzt man die Gleichungen (6) und (6') für die dritte der Gleichungen (3) und bildet die beiden anderen durch cyklische Vertauschung daraus entstehenden Gleichungen, so folgen den Lamé'schen analoge Differentialgleichungen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial G'}{\partial \eta'} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G'}{\partial \xi'} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G'}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial G'}{\partial \eta'} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G'}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial G'}{\partial \eta'} \right). \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen werden später die Hauptgleichungen genannt werden.

Es seien nun zwei Medien vorhanden, 1 und 2, die xy -Ebene sei die Grenzfläche, für 1 sei z negativ, für 2 positiv. Durch obere Indices ⁽¹⁾ und ⁽²⁾ soll die Zugehörigkeit zu den Medien bezeichnet werden. Als Grenzbedingungen sollen zunächst die Gleichheit der Verrückungen an der Grenze, d. h.:

$$(9) \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \text{für } z = 0$$

und ferner das Kirchhoff'sche Princip angenommen werden, welches aussagt, dass die an der Grenze geleistete Arbeit der Kräfte verschwinden müsse, d. h. mit Benutzung der Gleichungen (9) ist:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & (X_z^{(1)} + A_z^{(1)} - X_z^{(2)} - A_z^{(2)}) \frac{\partial u}{\partial t} + (Y_z^{(1)} + B_z^{(1)} - Y_z^{(2)} - B_z^{(2)}) \frac{\partial v}{\partial t} \\ & + (Z_z^{(1)} + C_z^{(1)} - Z_z^{(2)} - C_z^{(2)}) \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Aus der dritten der Gleichungen (9) und (8) folgt, dass für $z = 0$ ist:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial G^{(1)}}{\partial \xi^{(1)}} + \frac{\partial G'^{(1)}}{\partial \xi'^{(1)}} - \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \xi^{(2)}} - \frac{\partial G'^{(2)}}{\partial \xi'^{(2)}} \right] \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial G^{(1)}}{\partial \eta^{(1)}} + \frac{\partial G'^{(1)}}{\partial \eta'^{(1)}} - \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \eta^{(2)}} - \frac{\partial G'^{(2)}}{\partial \eta'^{(2)}} \right], \end{aligned}$$

d. h. es existirt eine Function Q von x und y , deren Differentialquotienten sind:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial G^{(1)}}{\partial \xi^{(1)}} + \frac{\partial G'^{(1)}}{\partial \xi'^{(1)}} - \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \xi^{(2)}} - \frac{\partial G'^{(2)}}{\partial \xi'^{(2)}}, \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial G^{(1)}}{\partial \eta^{(1)}} + \frac{\partial G'^{(1)}}{\partial \eta'^{(1)}} - \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \eta^{(2)}} - \frac{\partial G'^{(2)}}{\partial \eta'^{(2)}}. \end{aligned} \right.$$

Aus den ersten Grenzbedingungen (9) folgt, da sie längs der ganzen xy -Ebene und für jede Zeit bestehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t}, & \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial v^{(2)}}{\partial t}, & \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial w^{(2)}}{\partial t}, \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}, & \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} &= \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x}, & \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} &= \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}, & \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} &= \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y}, & \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} &= \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man diese gemeinsamen Werthe mit entsprechenden Buchstaben ohne Index, so lässt sich mit Hülfe von (11) die vierte Grenzbedingung (10) schreiben:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ & + (a_{11}^{(1)} - a_{11}^{(2)}) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - (a_{21}^{(1)} - a_{21}^{(2)}) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right.$$

1) s. Kirchhoff, l. c. p. 74.

y, t unabhängigen von Null verschiedenen Werth an. Ersteres folgt durch Differentiation nach t , welche ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w''v' - w'v'') = w'''v' - w'v''' + w''v'' - w''v'' = 0,$$

da infolge (14) $w''' = -(1/\tau^2)w'$, $v''' = -(1/\tau^2)v'$ ist. Dass $w''v' - w'v''$ nicht gleich Null ist, folgt daraus, dass dann der Quotient w'/v' von x, y, t unabhängig sein müsste; er sowohl, wie w/v müssen aber x, y, t enthalten, denn die Integrale der Hauptgleichungen verlangen elliptisch polarisirtes Licht und nicht geradlinig polarisirtes. — Die Gleichung (12) wird so zu:

$$(15) \quad \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} = C,$$

wo C eine Constante bedeutet. Nach den Gleichungen (13) wird (15) transformirt in:

$$(16) \quad \frac{dH}{df} \left(\varphi' \frac{\partial f}{\partial y} - \psi' \frac{\partial f}{\partial x} \right) = C.$$

Durch Differentiation nach t folgt hieraus:

$$\frac{dH'}{df} \left(\varphi' \frac{\partial f}{\partial y} - \psi' \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{1}{\tau^2} \frac{dH}{df} \left(\varphi \frac{\partial f}{\partial y} - \psi \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0.$$

Durch nochmaliges Differenziren und Division durch 2 folgt:

$$-\frac{1}{\tau^2} \frac{dH}{df} \left(\varphi' \frac{\partial f}{\partial y} - \psi' \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{1}{\tau^2} \frac{dH'}{df} \left(\varphi \frac{\partial f}{\partial y} - \psi \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0.$$

Diese beiden letzten Gleichungen sind aber nur dann miteinander verträglich, entweder wenn:

$$\varphi' \frac{\partial f}{\partial y} - \psi' \frac{\partial f}{\partial x} = \varphi \frac{\partial f}{\partial y} - \psi \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

ist, dessen Unmöglichkeit schon oben erwähnt ist, oder wenn $dH/df = 0$ ist, d. h.:

$$(17) \quad Q = \text{Const.}$$

Diese Gleichung spricht also, analog wie bei durchsichtigen Krystallen, die vierte Grenzbedingung aus, und es folgt, dass bei Zulässigkeit des Kirchhoff'schen Principes $C=0$ ist, d. h. da Relationen zwischen a''_{hk} und den $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ nicht bestehen können, dass:

$$a''^{(1)} - a''^{(2)} = b''^{(1)} - b''^{(2)} = c''^{(1)} - c''^{(2)} = 0$$

$$(21) \quad \begin{cases} u = u_1 + u_1', & v = v_1 + v_1', & w = w_1 + w_1', \\ u_1 = M e^{\frac{i}{\tau} [t - (\mu x + \nu y + \pi z)]}, & v_1 = N e^{\frac{i}{\tau} [t - (\mu x + \nu y + \pi z)]}, \\ w_1 = \Pi e^{\frac{i}{\tau} [t - (\mu x + \nu y + \pi z)]}, \\ u_1' = M' e^{-\frac{i}{\tau} [t - (\mu' x + \nu' y + \pi' z)]}, & v_1' = N' e^{-\frac{i}{\tau} [t - (\mu' x + \nu' y + \pi' z)]}, \\ w_1' = \Pi' e^{-\frac{i}{\tau} [t - (\mu' x + \nu' y + \pi' z)]}. \end{cases}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} M &= M + iM', & N &= N + iN', & \Pi &= P + iP' \\ M' &= M - iM', & N' &= N - iN', & \Pi' &= P - iP' \\ \mu &= m - im', & \nu &= n - in', & \pi &= p - ip' \\ \mu' &= m + im', & \nu' &= n + in', & \pi' &= p + ip' \\ i^2 &= -1. \end{aligned}$$

Es sollen die Constanten so bestimmt werden, dass sowohl u_1, v_1, w_1 als u_1', v_1', w_1' Lösungen der Hauptgleichungen werden.¹⁾ Da nun ist:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{i}{\tau} u_1, \quad \frac{\partial u_1'}{\partial t} = -\frac{i}{\tau} u_1',$$

so ist auch:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{i}{\tau} \xi_1, \text{ etc., wo } \xi_1 \text{ für } \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \text{ gesetzt ist.}$$

Die Hauptgleichungen nehmen so die Gestalt an:

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial \eta_1} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial G_1}{\partial \zeta_1}, & \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial G_1}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial G_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial G_1}{\partial \eta_1}, \\ \frac{\partial^2 u_1'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial G_1'}{\partial \eta_1'} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial G_1'}{\partial \zeta_1'}, & \frac{\partial^2 v_1'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial G_1'}{\partial \zeta_1'} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial G_1'}{\partial \xi_1'}, \\ \frac{\partial^2 w_1'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial G_1'}{\partial \xi_1'} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial G_1'}{\partial \eta_1'}. \end{cases}$$

Dabei bedeutet:

$$\begin{aligned} 2G_1 &= \alpha_{11} \xi_1^2 + \alpha_{22} \eta_1^2 + \alpha_{33} \zeta_1^2 + 2\alpha_{23} \eta_1 \zeta_1 + 2\alpha_{31} \zeta_1 \xi_1 + 2\alpha_{12} \xi_1 \eta_1, \\ 2G_1' &= \alpha_{11}' \xi_1'^2 + \alpha_{22}' \eta_1'^2 + \alpha_{33}' \zeta_1'^2 + 2\alpha_{23}' \eta_1' \zeta_1' + 2\alpha_{31}' \zeta_1' \xi_1' \\ &\quad + 2\alpha_{12}' \xi_1' \eta_1', \end{aligned}$$

1) Es können die u_1, v_1, w_1 und u_1', v_1', w_1' jetzt gesondert betrachtet werden, da alle Gleichungen, denen u, v, w zu genügen haben, linear sind.

2) Hier bedeutet ξ_1' nicht einen Differentialquotienten nach der Zeit, sondern den zu ξ_1 conjugirten Ausdruck.

so folgt aus den Hauptgleichungen:

$$(24) \quad \begin{cases} 0 = M(j_1 - 1) - Nl_3 - \Pi l_2, \\ 0 = -Ml_3 + N(j_2 - 1) - \Pi l_1, \\ 0 = -Ml_2 - Nl_1 + \Pi(j_3 - 1). \end{cases}$$

Fall, dass die Amplitude in der Wellenebene constant ist.

Wenn man auf die Grenzbedingungen keine Rücksicht nimmt, so ist folgende Annahme möglich¹⁾:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\mu_0}{\omega}, & n &= \frac{\nu_0}{\omega}, & p &= \frac{\pi_0}{\omega}; \\ m' &= \kappa \frac{\mu_0}{\omega}, & n' &= \kappa \frac{\nu_0}{\omega}, & p' &= \kappa \frac{\pi_0}{\omega}; \\ \mu_0^2 + \nu_0^2 + \pi_0^2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (20) stellen dann ebene Wellen dar, welche sich mit einer Geschwindigkeit ω in einer Richtung, deren Cosinus gegen die Coordinatenachsen μ_0, ν_0, π_0 sind, fortpflanzen, und deren Amplitude in der Wellenebene constant ist, senkrecht zu ihr sich dagegen ändert. Die Gleichungen (21) nehmen die Gestalt an:

$$\begin{aligned} u_1 &= M e^{\frac{i}{\tau} \left[t - \left(\frac{1-i\kappa}{\omega} \right) (\mu_0 x + \nu_0 y + \pi_0 z) \right]}, \\ v_1 &= N e^{\frac{i}{\tau} \left[t - \left(\frac{1-i\kappa}{\omega} \right) (\mu_0 x + \nu_0 y + \pi_0 z) \right]}, \\ w_1 &= H e^{\frac{i}{\tau} \left[t - \left(\frac{1-i\kappa}{\omega} \right) (\mu_0 x + \nu_0 y + \pi_0 z) \right]}. \end{aligned}$$

Da $\mu_0^2 + \nu_0^2 + \pi_0^2 = 1$ ist, so sind in diesem Falle alle Sätze über durchsichtige Krystalle hinsichtlich Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Schwingungsrichtung anzuwenden, nur dass an Stelle der Fortpflanzungsgeschwindigkeit allein hier der Quotient $\omega/(1-i\kappa)$ tritt, und dass die Constructionen mit Hülfe des Elasticitätsellipsoids nicht geometrisch, sondern nur analytisch durchzuführen sind.

Setzt man:

$$\frac{\omega}{1-i\kappa} = \Omega,$$

so folgt aus (24) durch Elimination von M, N, H die Gleichung:

1) W. Voigt, l. c. p. 582.

Die ε, η, ζ werden reell und bezeichnen die Richtungscosinus der Symmetrieachsen s_1, s_2, s_3 gegen die Coordinatenrichtungen, μ_0', ν_0', π_0' werden ebenfalls reell und bezeichnen die Richtungscosinus der Wellennormale gegen die Axen s_1, s_2, s_3 .

Aus (25) ergeben sich durch Trennung des Reellen und Imaginären die beiden in der oben erwähnten Abhandlung des Hrn. Voigt abgeleiteten Gleichungen¹⁾ für ω und κ , nämlich:

$$(32) \quad \begin{cases} 0 = \mu_0'^2 [(J_2 - \omega^2)(J_3 - \omega^2) - H_2 H_3] \\ \quad + \nu_0'^2 [(J_3 - \omega^2)(J_1 - \omega^2) - H_3 H_1] \\ \quad + \pi_0'^2 [(J_1 - \omega^2)(J_2 - \omega^2) - H_1 H_2], \end{cases}$$

$$(33) \quad \begin{cases} 0 = \mu_0'^2 [(J_2 - \omega^2) H_3 + (J_3 - \omega^2) H_2] \\ \quad + \nu_0'^2 [(J_3 - \omega^2) H_1 + (J_1 - \omega^2) H_3] \\ \quad + \pi_0'^2 [(J_1 - \omega^2) H_2 + (J_2 - \omega^2) H_1]. \end{cases}$$

wobei bezeichnet:

$$\begin{aligned} J_1 &= a(1 - \kappa^2) + 2\kappa \cdot a', & H_1 &= 2\kappa a - a'(1 - \kappa^2), \\ J_2 &= b(1 - \kappa^2) + 2\kappa \cdot b', & H_2 &= 2\kappa b - b'(1 - \kappa^2), \\ J_3 &= c(1 - \kappa^2) + 2\kappa \cdot c', & H_3 &= 2\kappa c - c'(1 - \kappa^2). \end{aligned}$$

Wenn man aus (33) ω^2 in κ ausdrückt und den so erhaltenen Werth in (32) einsetzt, so folgt für κ eine Gleichung achten Grades, welche sich in der Form schreiben lässt:

$$(34) \quad 0 = \mu_0'^2 \nu_0'^2 \pi_0'^2 \left[\frac{J_1(H_2 - H_3) + J_2(H_3 - H_1) + J_3(H_1 - H_2)}{H_1(\nu_0'^2 + \pi_0'^2) + H_2(\pi_0'^2 + \mu_0'^2) + H_3(\mu_0'^2 + \nu_0'^2)} \right]^2 + RS.$$

Dabei bedeutet:

$$\begin{aligned} S &= H_2 H_3 \mu_0'^2 + H_3 H_1 \nu_0'^2 + H_1 H_2 \pi_0'^2, \\ R &= 1 + \frac{J_1^2(\nu_0'^2 + \pi_0'^2) + J_2^2(\pi_0'^2 + \mu_0'^2) + J_3^2(\mu_0'^2 + \nu_0'^2) + L}{[H_1(\nu_0'^2 + \pi_0'^2) + H_2(\pi_0'^2 + \mu_0'^2) + H_3(\mu_0'^2 + \nu_0'^2)]^2}, \\ L &= 2J_2 J_3(\nu_0'^2 \pi_0'^2 - \mu_0'^2) + 2J_3 J_1(\pi_0'^2 \mu_0'^2 - \nu_0'^2) \\ &\quad + 2J_1 J_2(\mu_0'^2 \nu_0'^2 - \pi_0'^2). \end{aligned}$$

Der erste Theil der Gl. (34) ist beständig positiv, R ist auch stets positiv. Es ergibt sich nämlich, dass L Maxima und Minima erlangt an den Stellen:

$$\mu_0' = 0 \quad \text{oder} \quad \nu_0' = 0 \quad \text{oder} \quad \pi_0' = 0.$$

1) W. Voigt, l. c. p. 586.

fallsebene keine gegenseitige Verzögerung haben) und einander gleich. Es sei:

$$E_p = 1, \quad E_s = 1.$$

Der sogenannte Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ wird dadurch definirt, dass für ihn $\Delta = \pi/2$ ist, das Hauptazimuth $\bar{\psi}$ ist dann das zugehörige ψ , d. h. für $\varphi = \bar{\varphi}$ ist:

$$\frac{R_s}{R_p} = i\bar{\varrho} = i \operatorname{tg} \bar{\psi}.$$

Man kann die Gleichung für $\bar{\varphi}$ leicht bilden, indem man den reellen Theil von $R_p/R_s = 0$ setzt. $\bar{\varphi}$ ist vom Azimuth des einfallenden Lichtes abhängig. In unserem Falle, wo dasselbe $\pi/4$ beträgt: folgt aus den Gleichungen (42):

$$\frac{R_s}{R_p} = \frac{A_4^o (A_2^e - A_1^e) - A_4^e (A_2^o - A_1^o)}{A_3^o (A_2^e - A_1^e) - A_3^e (A_2^o - A_1^o)}.$$

Wenn man die Absorptionsconstanten a', b', c' des Krystalls immer kleiner werden lässt, während a, b, c ungeändert bleiben, so muss sich $\bar{\varphi}$ einem gewissen Grenzwert $\bar{\varphi}_0$ nähern, der erreicht wird für $a' = b' = c' = 0$. Man kann nun fragen, ob $\bar{\varphi}_0 = \Psi$ ist, wo Ψ der Polarisationswinkel des durchsichtigen Krystalls mit den Constanten a, b, c bedeutet. Setzt man:

$$A_n^o = A_n^o + iA_n'^o, \quad A_n^e = A_n^e + iA_n'^e,$$

wo A_n^o, \dots reell seien, so folgt $\bar{\varphi}_0$ aus der Gleichung:

$$A_4^o (A_2^e - A_1^e) - A_4^e (A_2^o - A_1^o) = 0,$$

während nach früherem Ψ folgt:

$$A_3^o A_4^e - A_4^o A_3^e = 0.$$

Man sieht, dass Ψ mit $\bar{\varphi}_0$ nur coincidirt, entweder wenn $A_4^o = 0$, oder wenn $A_4^e = 0$ ist. Dies ist der Fall bei isotropen Medien, also bei Metallen und bei den Krystallen dann, wenn die Einfallsebene mit einer Symmetrieebene coincidirt. Dabei ist bei den einaxigen Krystallen jeder Hauptschnitt eine solche. — Also nur bei den Metallen und in den angegebenen Fällen auch bei den Krystallen entspricht so der Haupteinfallswinkel des absorbirenden Mediums dem Polarisationswinkel des durchsichtigen.

Metallreflexion.

Wir werden nun die Formeln (41), die bis dahin noch allgemein für den Fall gelten, dass das Medium 1 durchsichtig und isotrop, 2 ein absorbirender Krystall ist, dessen Absorptionsachsen eine beliebige Lage gegen die Elasticitätsachsen haben, anwenden darauf, dass auch 2 isotrop ist, d. h. die Formeln für die Metallreflexion ableiten.

Es ist zu setzen:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha = a + ia', \quad \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{12} = 0.$$

Gemäss (37) wird:

$$(50) \quad \sin \chi^o = \sin \chi^e = \sqrt{\alpha} \cdot \sin \varphi.$$

Die Gl. (38) erscheint in der Form $^o/o$, man kann setzen:

$$\vartheta^o = 0, \quad \vartheta^e = \frac{\pi}{2}.$$

So werden die Gleichungen für die A nach (41):

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (A_1^o - A_3^o) \cos \varphi = \cos \chi^1, & A_2^o + A_4^o = 0, \\ (A_1^o + A_3^o) \sin \varphi = \sin \chi, & A_2^o - A_4^o = 0. \\ (A_1^e - A_3^e) \cos \varphi = 0, & A_2^e + A_4^e = 1. \\ (A_1^e + A_3^e) \sin \varphi = 0, & (A_2^e - A_4^e) \operatorname{ctg} \varphi = \alpha \operatorname{ctg} \chi. \end{array} \right.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} A_1^o &= \frac{\sin(\varphi + \chi)}{\sin 2\varphi}, & A_3^o &= -\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin 2\varphi}, \\ A_2^o &= A_4^o = 0, & A_1^e &= A_3^e = 0, \\ A_2^e &= \frac{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}{\sin 2\varphi}, & A_4^e &= \frac{\cos(\varphi + \chi) \sin(\varphi - \chi)}{\sin 2\varphi}. \end{aligned}$$

Formel (42) ergibt daher als gebrochene und reflectirte Amplituden:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D_o = E_p \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \chi)}, & D_e = E_s \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}, \\ R_p = -E_p \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}, & R_s = E_s \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}. \end{array} \right.$$

Es soll nun das Azimuth des einfallenden Lichtes 45° betragen, d. h. es ist $E_p = E_s$. Dann ist:

$$\frac{R_s}{R_p} = -\frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)}.$$

1) Bezüglich der Differenz der Zeichen gegenüber den sonst üblichen Formeln bei durchsichtigen Medien s. Anm. p. 607.

und nach Formel (44) und (50) ist:

$$(53) \quad M - Ni = \operatorname{ctg}^2 \varphi \frac{1 - \alpha \sin^2 \varphi}{\alpha \sin^2 \varphi},$$

welches ergibt:

$$M = \operatorname{ctg}^2 \varphi \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha'^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 \right), \quad N = \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2}.$$

Nach früher Gesagtem ist die Gleichung für den Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$: $M^2 + N^2 = 1$.

Dieses ergibt nun:

$$(54) \quad \operatorname{tg}^4 \bar{\varphi} - \operatorname{tg}^2 \bar{\varphi} + \operatorname{tg}^2 \bar{\varphi} \frac{2\alpha - 1}{\alpha^2 + \alpha'^2} - \frac{1}{\alpha^2 + \alpha'^2} = 0.$$

Wenn α und α' sehr klein sind, so folgen hieraus drei reelle Wurzeln für $\operatorname{tg}^2 \bar{\varphi}$, von denen aber nur eine positiv ist. Sind α und α' grösser, so gibt es nur eine reelle Wurzel für $\operatorname{tg}^2 \bar{\varphi}$, es gibt also nur einen Haupteinfallswinkel.

Gemäss Formel (46) wird das Hauptazimuth $\bar{\psi}$ gegeben durch:

$$\cos 4\bar{\psi} = \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha'^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \bar{\varphi}} - 1 \right), \quad \sin 4\bar{\psi} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}}{\sin^2 \bar{\varphi}} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2}.$$

Es ist ein von Brewster ausgesprochener Satz, dass für den Haupteinfallswinkel das Verhältniss des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes zu dem parallel derselben polarisirten ein Minimum erreicht. Wir wollen sehen, ob der Satz nach obigen Formeln gültig ist. Nach (47) ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \quad -\sin \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \cos \nu \cos 2\mu 2 \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} - \sin \nu \sin 2\mu \frac{\partial \nu}{\partial \varphi}.$$

Für $\varphi = \bar{\varphi}$ ist: $\mu = \frac{\pi}{4}$, d. h. $\cos 2\mu = 0$, also: $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \frac{\partial \nu}{\partial \varphi}$,

da $\sigma = \nu$ wird. Es ist nun:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} = \frac{M \frac{\partial N}{\partial \varphi} - N \frac{\partial M}{\partial \varphi}}{M^2} \cos^2 2\nu.$$

Für den Haupteinfallswinkel ist aber:

$$M^2 = \cos^2 2\nu, \quad M \frac{\partial N}{\partial \varphi} - N \frac{\partial M}{\partial \varphi} = 2 \sin 4\bar{\psi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi},$$

folglich ist: $\left[\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right]_{\varphi = \bar{\varphi}} = \sin 4\bar{\psi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}.$

Da dieser Ausdruck positiv ist, so folgt hieraus, dass der Brewster'sche Satz nicht gilt, und dass das Mini-

mum von ψ bei Metallen immer für einen Einfallswinkel stattfindet, welcher kleiner als der Haupteinfallswinkel ist.

Folgende Formeln dienen zur Berechnung der Constanten α und α' aus beobachteten ψ und Δ bei beliebigem Einfallswinkel. Setzt man:

$$(57) \quad \frac{1 - \frac{R_s}{R_p}}{1 + \frac{R_s}{R_p}} = A - Bi, \quad \text{so ist:}$$

$$(58) \quad A = \frac{\cos 2\psi}{1 + \sin 2\psi \cos \Delta}, \quad B = \frac{\sin 2\psi \sin \Delta}{1 + \sin 2\psi \cos \Delta},$$

andererseits ist, da $M - Ni = (A - Bi)^2$, nach Formel (53):

$$\frac{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\alpha} \sin \varphi} = \operatorname{tg} \varphi (A - Bi).$$

Setzt man: $\operatorname{tg} P = \operatorname{tg}^2 \chi (A^2 + B^2)$, $\operatorname{tg} Q = \frac{B}{A}$, so wird:

$$(59) \quad \alpha = \frac{\cos^2 P}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} P \cos 2Q}{1 + \sin 2P \cos 2Q}, \quad \alpha' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{\sin 2P \sin 2Q}{1 + \sin 2P \cos 2Q}.$$

Ich schreibe diese Formeln hier so allgemein hin, um mich später bei den Krystallen, wo sie wieder auftreten, nur dass A und B nicht die einfache Form wie in (58) haben, sondern in complicirter Weise von den beobachtbaren Grössen abhängen, darauf berufen zu können. — Hier für Metalle wird nach (58):

$$\operatorname{tg} P = \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{1 - \sin 2\psi \cos \Delta}{1 + \sin 2\psi \cos \Delta}, \quad \operatorname{tg} Q = \sin \Delta \operatorname{tg} 2\psi.$$

Ist der Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ und das Hauptazimuth $\bar{\psi}$ beobachtet, so schreiben sich die Gleichungen (59) auch:

$$(60) \quad \alpha = \frac{\cos^2 P}{\sin^2 \bar{\varphi}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} P \cos 4\bar{\psi}}{1 + \sin 2P \cos 4\bar{\psi}}, \quad \alpha' = \frac{1}{2 \sin^2 \bar{\varphi}} \cdot \frac{\sin 2P \sin 4\bar{\psi}}{1 + \sin 2P \cos 4\bar{\psi}},$$

für $\operatorname{tg} P = \operatorname{tg}^2 \bar{\varphi}.$

Diese Formeln sind bequem bei der Anwendung Gauss'scher Logarithmen, bei denen man zu $\log p$ den $\log(1 + p)$ sofort findet.

Man kann auch anders verfahren. Es ist nach (53):

welche mit den Coordinatenaxen Winkel einschliesst, deren Cosinus resp. p, q, r seien, so ist:

$$\begin{aligned} a &= b, & a' &= b', \\ a_{11} &= a + (c - a) p^2, & a'_{11} &= a' + (c' - a') p^2, \\ a_{22} &= a + (c - a) q^2, & a'_{22} &= a' + (c' - a') q^2, \\ a_{33} &= a + (c - a) r^2, & a'_{33} &= a' + (c' - a') r^2, \\ a_{23} &= (c - a) q r, & a'_{23} &= (c' - a') q r, \\ a_{31} &= (c - a) r p, & a'_{31} &= (c' - a') r p, \\ a_{12} &= (c - a) p q, & a'_{12} &= (c' - a') p q, \end{aligned}$$

$$\alpha_{hk} = a_{hk} + i a'_{hk}, \quad \alpha'_{hk} = a_{hk} - i a'_{hk},$$

$$\alpha = a + i a', \quad \alpha' = a - i a', \quad \gamma = c + i c', \quad \gamma' = c - i c'.$$

Die Gleichung für χ zerfällt in zwei; nämlich in:

$$\sin^2 \chi^o = \frac{\alpha}{h^2} = \alpha \sin^2 \varphi, \quad \text{d. h.} \quad \sin \chi^o = \sqrt{\alpha} \sin \varphi,$$

und in:

$$(62) \quad r^2(\gamma - \alpha) - \gamma + 2rp(\gamma - \alpha) \operatorname{tg} \chi^e + [p^2(\gamma - \alpha) + h^2 - \gamma] \operatorname{tg}^2 \chi^e = 0.$$

Führt man die Winkel v und w ¹⁾ ein, definiert durch:

$$p = \sin v \sin w, \quad q = \cos v, \quad r = \sin v \cos w,$$

so wird die Gleichung für χ^e :

$$(63) \quad \begin{cases} \gamma + (\alpha - \gamma) \sin^2 v \cos^2 w + (\alpha - \gamma) \sin^2 v \sin 2w \operatorname{tg} \chi^e \\ + [(\alpha - \gamma) \sin^2 v \sin^2 w + \gamma - h^2] \operatorname{tg}^2 \chi^e = 0, \end{cases}$$

$$\text{oder auch: } h^2 \sin^2 \chi^e = \gamma + (\alpha - \gamma) \sin^2 v \cos^2 (\chi^e - w).$$

Aus (38) folgt:

$$(64) \quad \operatorname{tg} \vartheta^o = \frac{1}{\operatorname{tg} v \sin (\chi^o - w)},$$

$$(65) \quad \operatorname{tg} \vartheta^e = - \operatorname{tg} v \sin (\chi^e - w).^{2)}$$

Wie die Formeln für die Amplituden des reflectirten und gebrochenen Lichtes für beliebige Lage der Grenze und der Einfallsebene aus dem Formelsystem (41) abzuleiten sind, ist klar. Ich will aber hier nur einige Fälle behandeln, wie sie sich durch Specialisirung der Lage der optischen Axe ergeben, da man in der Praxis auch stets nur die einfachsten Fälle behandeln wird.

1) Eine Verwechslung mit den Verschiebungscomponenten v und w ist nicht zu befürchten, da sie nicht wieder auftreten.

2) Es sind v, w reell, χ^o, χ^e complex.

Aus (42) folgt:

$$R_p = E_p \cdot \frac{A_3^o}{A_1^o}, \quad R_s = E_s \cdot \frac{A_4^e}{A_2^e},$$

$$D_o = E_p \cdot \frac{1}{A_1^o}, \quad D_e = E_s \cdot \frac{1}{A_2^e},$$

$$r = \frac{R_s}{R_p} = \frac{E_s}{E_p} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} \cos \varphi + \sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\alpha} \cos \varphi - \sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{\cos \varphi - \sqrt{\alpha} \sqrt{1 - \gamma \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\alpha} \sqrt{1 - \gamma \sin^2 \varphi}}.$$

II. Die optische Axe liegt in der Grenze und in der Einfallsebene.

$$v = \frac{\pi}{2}, \quad w = \frac{\pi}{2}.$$

$$\sin \chi^o = \sqrt{\alpha} \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \chi^e = \frac{\sqrt{\gamma} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}},$$

$$\vartheta^o = 0, \quad \vartheta^e = \frac{\pi}{2}.$$

$$\alpha_{11} = \gamma, \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha, \quad \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 0.$$

$$2A_1^o = \sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}, \quad 2A_3^o = \sqrt{\alpha} - \frac{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi},$$

$$A_2^o = A_4^o = 0, \quad A_1^e = A_3^e = 0.$$

$$2A_2^e = 1 + \sqrt{\gamma} \frac{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}, \quad 2A_4^e = 1 - \sqrt{\gamma} \frac{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi},$$

$$R_p = E_p \cdot \frac{A_3^o}{A_1^o}, \quad R_s = E_s \cdot \frac{A_4^e}{A_2^e},$$

$$D_o = E_p \cdot \frac{1}{A_1^o}, \quad D_e = E_s \cdot \frac{1}{A_2^e},$$

$$r = \frac{R_s}{R_p} = \frac{E_s}{E_p} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} \cos \varphi + \sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\alpha} \cos \varphi - \sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{\cos \varphi - \sqrt{\gamma} \sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\gamma} \sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}.$$

III. Die optische Axe liegt in der Grenze und senkrecht zur Einfallsebene.

$$v = 0, \quad w = \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \chi^o = \sqrt{\alpha} \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \chi^e = \frac{\sqrt{\gamma} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \gamma \sin^2 \varphi}}, \quad \sin \chi^e = \sqrt{\gamma} \sin \varphi,$$

$$\vartheta^o = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta^e = 0.$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{33} = \alpha, \quad \alpha_{22} = \gamma, \quad \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 0.$$

und zwar für Wasser bei Einführung der Spannungsconstante nach Gay-Lussac in Centimetergrammen:

$$v^2 = 982 \left(\frac{\lambda}{2\pi} + 0,074 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \right).$$

Es entging W. Thomson nicht, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen hiernach ein Minimum hat, nämlich $v_0 = 23$ cm für $\lambda_0 = 1,7$ cm. Fast gleichzeitig hat derselbe dann im Sound of Mull in Gegenwart von v. Helmholtz dies Minimum experimentell bestätigt, und zwar durch Versuche mit einer Angelschnur, welche bei Windstille in senkrechter Lage durch die glatte Wasseroberfläche gezogen wurde. In der Formel von W. Thomson ist ausgesprochen, dass für beträchtliche Werthe von λ , grösser als 1,7 cm, die bewegende Kraft vorwiegend die Schwere, also $v^2 = (\lambda/2\pi)g$, und dass für Werthe von λ , welche sehr viel kleiner als 1,7 cm sind, die erregende Kraft vorwiegend die Oberflächenspannung ist, also $v^2 = (2\pi/\lambda)\tau$. Die Messung von v und λ kann offenbar dazu dienen, die specifische Cohäsion verschiedener Flüssigkeiten zu bestimmen.

In neuester Zeit hat Lord Rayleigh¹⁾ meine früheren experimentellen Untersuchungen über die Rippungen auf der Oberflächenhaut der Flüssigkeiten einer sowohl experimentellen Prüfung als auch theoretischen Beurtheilung unterzogen. In seiner interessanten Abhandlung deducirt er aus der Thomson'schen Formel, für sehr kleine λ , dass $v^2\lambda = n^2\lambda^3 = 2\pi\tau = \text{Const.}$, also $n^{2/3}\lambda^{2/3} = \text{Const.}$ sein müsse; dagegen glaubte ich, der ich keine Kenntniss von der Thomson'schen Formel haben konnte, aus meinen Messungen, wenigstens theilweise, schliessen zu müssen $n\lambda^2 = \text{Const.}$ In der That stimmt nach Lord Rayleigh's Bemerkung für das Intervall $\lambda = 0,154$ bis $0,030$ cm die theoretische Formel besser. Die Abhandlung von Lord Rayleigh enthält noch eine andere Correction meiner früheren Deductionen, welche eine Erscheinung betreffen, die 1869 zuerst von Lissajous beobachtet worden ist.

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 16. p. 50. 1883.

2) In der Abhandlung von Lord Rayleigh steht $n^{2/3}\lambda^{2/3}$, was wohl nur ein Druckfehler ist.

unabhängig oder constant seien, dass die Wellenbewegung in den Erregungscentren I und II gleichzeitig und gleichsinnig beginne, und dass t von der grössten Deviation angerechnet werde.

Sind e und e_1 die Abstände eines Molecüls von I und II, so sind die partiellen Deviationen zur Zeit t :

$$y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} \right), \quad y' = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{e_1}{\lambda_1} \right);$$

$$\text{also: } Y = y + y' = 2a \cos \pi \left\{ t \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} \right) - \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} \right) \right\} \\ \times \cos \pi \left\{ t \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) - \left(\frac{e}{\lambda} - \frac{e_1}{\lambda_1} \right) \right\}.$$

Da es nicht möglich ist, t von e oder e_1 zu trennen, so hat man es mit fortschreitenden Wellen zu thun, und die Gleichungen der Interferenzcurven sind:

$$(B) \quad \frac{e}{\lambda} - \frac{e_1}{\lambda_1} = \frac{2p+1}{2} + t \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) = \frac{2p+1}{2} + t(n - n_1),$$

$$(C) \quad \frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} = \frac{2q+1}{2} + t \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} \right) = \frac{2q+1}{2} + t(n + n_1),$$

wo p und q ganze Zahlen bedeuten. Die Gleichungen stellen zwei gesonderte Scharen von Bipolarcurven dar, welche ihren Ort wechseln, da sie die Variable t enthalten. Diese verschwindet nur aus den Gleichungen, wenn $n - n_1$ oder $n + n_1$ verschwindet, d. h. entweder $n_1 = n$ oder $-n$ wird. Das erste kann eintreten, wenn beide Systeme sich centrifugal oder centripetal bewegen; das zweite, wenn das eine Kreiswellensystem centrifugal, das andere centripetal ist.

Die Curven (B) und (C) sind Cartesische Ovale, welche aus einem inneren Theil (Oval) und einem äusseren (Oval oder Unifolium) bestehen. Nach Liguine und Salmon ist ihre Polargleichung:

$$r^2 - 2r(b \cos \varphi \pm a) + c^2 = 0.$$

Setzt man nämlich r statt e , also:

$$\frac{r}{\lambda} \pm \frac{r_1}{\lambda_1} = f,$$

$$\text{so wird: } \frac{r_1^2}{\lambda_1^2} = \frac{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}{\lambda_1^2} = f^2 \pm 2 \frac{rf}{\lambda} + \frac{r^2}{\lambda^2},$$

dass zwischen den Curven (B) Wellensysteme von aufeinanderfolgenden Bergen und Thälern sich axifugal mit der Geschwindigkeit der Berg und Thal voneinander scheidenden Curven (C) fortbewegen, und zwar auf Curvenscharen (D), welche fest sind und ebenso wie (B) und (C) die Centrale senkrecht durchschneiden.

Diese Trajektorien (D) der axifugalen Wellenberge sollen später bestimmt werden. Zunächst untersuchen wir noch die Wanderung der Rippungen auf der Axe. Für die Scharen (B) ist zwischen I und II:

$$e = \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1} \left\{ \frac{d}{\lambda_1} + \frac{2p+1}{2} + t(n - n_1) \right\},$$

oder da wir $d = v\lambda_1$ angenommen haben:

$$e = \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1} \left\{ \frac{2p+1}{2} + t(n - n_1) \right\}.$$

Es muss also mit wachsendem t der Abstand l immer grösser werden, d. h. die Schar der Interferenzpunkte oder auch der Berge und Thäler wandert von I nach II, vom höheren zum tieferen Tone hinüber. Wir bestimmen nun:

a. Die Geschwindigkeit dieser Wanderung der Curven (B) innerhalb I und II.

Differenziren wir e nach t , so erhalten wir:

$$w = \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1} (n - n_1) = \frac{\lambda_1 c - \lambda c_1}{\lambda + \lambda_1}.$$

Da $n > n_1$ ist, so wird ∂e positiv; die Wanderung erfolgt von I nach II.¹⁾ Nun ist $n - n_1$ die Anzahl der hörbaren Stösse der Stimmgabeln. Die Wellenbreite L der resultirenden Welle erhält man, indem man das Zeitintervall $2t_1 = 2/(n - n_1)$ mit $\partial e / \partial t$ multiplicirt, also:

$$L = 2t_1 \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{2\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1}.$$

Man kann also sagen: Der doppelte Abstand der Knotenpunkte oder der Rippungen auf der Centrale ist gleich dem harmonischen Mittel aus den Wellenbreiten λ und λ_1 . Aus dem Ausdruck für w folgt zugleich, dass an irgend

1) Diesen Satz fand Rayleigh experimentell bestätigt auch für Wellen II. Ordnung bei $n = 5$ bis 9. In seiner Formel fehlt der Factor 2π .

einem festen Punkte der Centralen stets so viele Rippungen vorüberreichen, als Stösse erfolgen, wie dies auch die Beobachtungen zeigen. Es sei in einem concreten Falle unter Beibehaltung der Relation $\pi \lambda^2 = \text{Const.}$:

$$\begin{aligned} \pi &= 261, & \lambda &= 0,213 \text{ cm}, & e &= 55,60 \text{ cm}, \\ \pi_1 &= 247, & \lambda_1 &= 0,219 \text{ „}, & e_1 &= 54,09 \text{ „} \end{aligned}$$

Dann ist $t_1 = 1/(\pi - \pi_1) = 1/14 \text{ Sec.}$

$$L = \frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} = 0,216 \text{ cm}, \quad w = \frac{\partial e}{\partial t} = 1,51 \text{ cm.}$$

Die Zahl der Stösse ist $\pi - \pi_1 = 14$ und das Tonintervall ein halber Ton.

b. Die Geschwindigkeit der Wanderung der Curven (C) zwischen I und II.

Man findet für $e + e_1 = d$:

$$e = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} \left\{ \frac{2\pi + 1}{2} + t(\pi + \pi_1) \right\},$$

und:

$$w = \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} (\pi + \pi_1).$$

Da $\lambda_1 > \lambda$ ist, so wird w positiv. Auch diese Curven wandern vom tieferen zum höheren Ton, aber mit viel grösserer Geschwindigkeit, weshalb sie direct nicht wahrgenommen werden. Für den obigen concreten Fall ist:

$$t_2 = \frac{1}{\pi + \pi_1} = 1/508 \text{ Sec.}$$

$$L = 2t_2 \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = 15,5 \text{ cm}, \quad w = \frac{\partial e}{\partial t} = 7899,4 \text{ cm.}$$

c. Die Geschwindigkeit der Wanderung der Curven (B) ausserhalb I II.

Auf der rechten Seite von II ist $e_1 = e - d$, also:

$$e = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} \left\{ \frac{2r + 1}{2} + t(\pi - \pi_1) \right\}$$

und:

$$w = \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} (\pi - \pi_1).$$

Demnach ist die Richtung der Wanderung rechts von II positiv und links von I negativ, wie dies in Fig. 7 durch Pfeile angedeutet ist. Für unseren concreten Fall ist $t_1 = 1/14 \text{ Sec.}$

$$L = 2t_1 \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = 15,5 \text{ cm}, \quad w = 217,7 \text{ cm}.$$

Also auch hier ist die Wanderung sehr schnell.

d. Die Geschwindigkeit der Wanderung der Curven (C) ausserhalb I II.

Man erhält:

$$e = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} \left\{ \frac{2m + 1}{2} + t(n + n_1) \right\},$$

$$w = \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} (n + n_1).$$

Die Richtung der Wanderung ist somit auch positiv rechts von II, negativ links von I. Ferner ist $t_2 = 1/508$ Sec.:

$$L = \frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} = 0,216 \text{ cm}, \quad w = 54,86 \text{ cm}.$$

Der Abstand der Rippungen stimmt mit dem in a. überein; jedoch ist die Wanderung ebenfalls zu schnell, um so deutlich wie die in a. beschriebene wahrgenommen zu werden.

Wir wenden uns wieder der Betrachtung der Bewegung auf der ganzen Niveaufläche zu, über welche sich die Interferenzcurven ausbreiten. Es sind bereits erwähnt die Trajectorien (D) der axifugalen Wellenberge, von denen sich auf der Centralen I II in jedem Zeitintervall $2t_2$ einer zwischen zwei benachbarten Curven (B) bildet. Da der Auswechsel der Curven (B) in jedem Zeitintervall t_1 geschieht, so gehen in dieser Zeit $1/2 (n + n_1)/(n - n_1)$ Wellenberge zwischen zwei Rippungen nach einer Seite ab. Um unser Augenblicksbild (Fig. 7) auf einen wirklichen Fall zu beziehen, so ist angenommen, es stelle eine fünffache Vergrößerung dar. Dann sind die simultanen Werthe für:

$$\text{I. } n = 437,5, \quad \lambda = 1,6 \text{ mm}, \quad c = 70,0 \text{ cm},$$

$$\text{II. } n_1 = 2800, \quad \lambda_1 = 2,0 \text{ „}, \quad c_1 = 56,0 \text{ „}$$

Demnach findet man die Distanz der Rippungen auf der Axe gleich $8/9$ mm, $w = 14,0$ cm und die Anzahl der in $t_1 = 1/157,5$ Sec. abgehenden Berge $25/18$, in jeder Secunde $1/2 (n + n_1) = 359$ Berge. Die Zahl der Stösse ist 157,5, und ebenso viele Linien (B) bewegen sich in der Secunde von I nach II. Die Distanz der festen Curven (D) würde demnach auf der Centralen sein:

$$\frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} \cdot \frac{n - n_1}{n + n_1} = 0,4 \text{ mm.}$$

Bei dem vorher angenommenen Falle war:

$$\text{I. } n = 261, \quad \lambda = 2,13 \text{ mm,} \quad c = 55,60 \text{ cm,}$$

$$\text{II. } n_1 = 247, \quad \lambda_1 = 2,19 \text{ „} \quad c_1 = 54,09 \text{ „}$$

folglich die Distanz der festen Curven (D) nur 0,06 mm. Die Anzahl der Abgangsstellen zwischen I und II ist:

$$\frac{d(\lambda + \lambda_1)(n + n_1)}{2\lambda\lambda_1(n - n_1)},$$

und weil die Anzahl der zu beiden Seiten der Centralen abgehenden Berge pro Sec. $n + n_1$ beträgt, so ist die gesammte Anzahl:

$$\frac{d(\lambda + \lambda_1)(n + n_1)^2}{2\lambda\lambda_1(n - n_1)}.$$

Da in dem Augenblicksbilde $d = 16$ mm angenommen ist, so ist diese Anzahl für den ersten Fall 29400, für den zweiten 147000.

Wir wollen nun die Gleichung der Curven (D) bestimmen. Aus dem Umstande, dass die Scharen (B) und (C), welche paarweise einen Berg von vier Seiten einschliessen, beide in verschiedenen Zeitintervallen t_1 und t_2 miteinander auswechseln, folgt, dass die Berge, resp. die Thäler sich auf Curven (D) bewegen, welche die Curven (B) schief durchschneiden. Der in H befindliche Berg gelangt nicht nach J , sondern nach H_2 oder D , und HH_2 ist die gesuchte Trajectorie (D). Ihre Gleichung wird gefunden, indem man aus der Gleichung der zwischen (B) und (C) liegenden Rippungen die Zeit t eliminirt. Diese sind:

$$(J) \quad \frac{e}{\lambda} - \frac{e_1}{\lambda_1} = l + t(n - n_1),$$

$$(K) \quad \frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} = m + t(n + n_1), \quad (l \text{ und } m \text{ ganze Zahlen}).$$

Die Elimination ergibt:

$$(D) \quad \frac{e}{c} - \frac{e_1}{c_1} = \frac{1}{2nn_1} \{ l(n + n_1) - m(n - n_1) \}.$$

Dies sind ebenfalls Curven IV. Ordnung. Ist im speciellen Falle $c_1 = c$, so sind es feste Hyperbeln. Ist ausserdem noch $\lambda_1 = \lambda$, so sind auch die Curven (B) Hyperbeln.

Da aber zugleich $n_1 = n$ wird, so sind (B) stehende Hyperbeln und die Curven (C) axifugale Ellipsen. Die Gleichung der Trajectorien wird:

$$(D) \quad e - e_1 = l\lambda,$$

d. h. es bewegen sich die Wellenberge und die Thäler zwischen der festen Curvenschar:

$$(B) \quad e - e_1 = \frac{2p+1}{2} \lambda.$$

Das bekannte Augenblicksbild erhält man mittelst einer einzigen Stimmgabel mit zwei Spitzen. In demselben müssen die Berge und Thäler schachbrettartig über die ganze Niveaufläche ausgebreitet erscheinen (Fig. 8).

Ein ganz ähnliches Bild entsteht, wenn zwei Kreiswellensysteme miteinander interferiren, welche in den Brennpunkten eines elliptischen Gefäßes auf Flüssigkeiten erregt werden und gleiche Wellenbreiten haben. Dieses Augenblicksbild¹⁾ unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur insofern, als beide Curvenscharen (B) und (C) stehend oder fest sind.

Infolge der adoptirten Relation $n\lambda^2 = \text{Const.}$ würde nun weiter sein:

$$c : c_1 = \lambda_1 : \lambda.$$

sodass man auch setzen kann:

$$(D) \quad \frac{e}{\lambda_1} - \frac{e_1}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{2c} \left\{ l(n + n_1) - m(n - n_1) \right\}.$$

Es liegen demnach die Curven (D) mit den Curven (B) und (J) völlig symmetrisch gegen die Mediane MM' der

1) Man vgl. Wellenlehre von E. H. Weber und W. Weber, Tab. VI, Fig. 51 u. 53. Diese berühmten Kupferstiche, welche neuerdings auch in andere physikalische Werke übergegangen sind, leiden an einem merkwürdigen perspectivischen Fehler, der bisher unbemerkt geblieben zu sein scheint. Betrachtet man Fig. 51 in schiefer Lage von unten, so sieht man nur Thäler; betrachtet man sie von oben her, nur Berge. Bei Fig. 53 ist das umgekehrte der Fall. Die schachbrettartige Vertheilung von Berg und Thal ist nicht erkennbar. Die von mir beigegebene Fig. 8 ist die Copie einer photographischen Aufnahme durch den Herrn Privatdocenten Dr. Mönnich von einem nach meiner Angabe ausgeführten Gypsmodelle. Dieses befand sich auch in der „Wissenschaftlichen Ausstellung“ der 60. Vers. Deutsch. Naturf. u. Aerzte in Wiesbaden.

$$\text{I } F' = \frac{1}{2} \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1} = \frac{4}{9} \text{ mm},$$

d. h. gleich einer halben Rippendistanz. Allgemein ist:

$$e = \frac{2s + 1}{2} \cdot \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{9}s\right) \text{ mm}.$$

Ueber II hinaus ist immer $e - e_1 = d$, also:

$$\frac{e_1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda_1} = -u + \frac{2p + 1}{2} = \frac{2z + 1}{2}.$$

Der kleinste Werth ist:

$$\text{II } A' = e_1 = \frac{1}{2} \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = \text{I } A.$$

und allgemein:

$$e_1 = \frac{2z + 1}{2} \cdot \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = (4 + 8z) \text{ mm}.$$

2) Die Curven (C). Auf der Axe ist für dieselben:

$$\frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} = \frac{2q + 1}{2}.$$

Links von I ist zu setzen $e_1 - e = d$, also:

$$\frac{e}{\lambda} + \frac{e}{\lambda_1} = -v + \frac{2q + 1}{2} = \frac{2x + 1}{2},$$

folglich allgemein:

$$e = \frac{2x + 1}{2} \cdot \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1}.$$

Der kleinste Werth ist:

$$\text{I } F = e = \frac{1}{2} \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1} = \frac{4}{9} \text{ mm}.$$

Für die inneren Schnittpunkte ist $e + e_1 = d$, also:

$$e = \frac{2x + 1}{2} \cdot \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = (4 + 8x) \text{ mm}.$$

Für den 1. Schnittpunkt E erhält man:

$$\text{I } E = \frac{1}{2} \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = 4 \text{ mm};$$

für den zweiten:

$$\text{I } E' = \frac{3}{2} \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = 12 \text{ mm}.$$

Der dritte würde über II hinausgehen, für welche Strecke aber $e - e_1 = d$ zu setzen ist, also:

$$\frac{e_1}{\lambda} + \frac{e}{\lambda_1} = -u + \frac{2q + 1}{2} = \frac{2y + 1}{2}.$$

Demnach ist über II hinaus:

$$e_1 = \frac{2y + 1}{2} \cdot \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1} = (4/9 + 5/9 y) \text{ mm.}$$

Die (C)-Curven haben demnach ausserhalb der Pole dieselben Distanzen, wie die (B)-Curven innerhalb und umgekehrt.

3) Die Curven (J). Sie liegen zwischen (B) in der Mitte, und ihre Gleichung ist:

$$\frac{e}{\lambda} - \frac{e_1}{\lambda_1} = l.$$

Wenn $l = 0$ ist, so wird die Curve ein Kreis, dessen Schnittpunkte gefunden werden, wenn man nacheinander $e_1 + e = d$ und $e_1 - e = d$ setzt und nach e auflöst. Man findet für den Abstand:

rechts von I: $x_1 = \frac{d\lambda}{\lambda + \lambda_1} = 7\frac{1}{9} \text{ mm.}$

links von I: $x_2 = \frac{d\lambda}{\lambda_1 - \lambda} = 64 \text{ mm.}$

Der 1. Schnittpunkt liegt um eine Rippendistanz vor der Mediane, der zweite um 72 Rippungen links von I. Der Radius ist:

$$\rho_1 = \frac{d\lambda\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2}.$$

4) Die Curven (K). Unter diesen können Kreise nicht vorkommen.

5) Die Curven (D). Ihre Gleichung ist:

$$\frac{e}{\lambda_1} - \frac{e_1}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{2c} \left\{ l(n + n_1) - m(n - n_1) \right\}.$$

Da im angenommenen Falle:

$$\frac{l}{m} = \frac{n - n_1}{n + n_1} = 9/41$$

rational ist, so kann eine dieser Curven ein Kreis werden. Derselbe liegt ebenso gegen II, wie der Kreis (J) gegen I, und ist demselben congruent.

Für unseren Specialfall $n = 437,5$ und $n_1 = 280$ ist 17,5 der grösste gemeinschaftliche Theiler. Deshalb erscheint das Augenblicksbild in je zwei Secunden 35 mal, weil die rechte Seite von (J) eine ganze Zahl wird, wenn man $t = 1/17,5$ setzt.

Von besonderem Interesse ist es noch, die Fortbewegungsgeschwindigkeit der Wellenberge auf den (D)-Curven,

also in ihrer Bahn zu bestimmen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Bewegung in dem Durchschnittspunkte einer (K)-Curve mit einer (D)-Curve. Es war gefunden:

$$(K) \quad \frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} = m + t(n + n_1),$$

$$(D) \quad \frac{e}{\lambda_1} - \frac{e_1}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{2\lambda n} \left\{ l(n + n_1) - m(n - n_1) \right\}.$$

Fixiren wir den Zeitmoment t , betrachten t also als constant, indem wir auf der (K)-Curve fortschreiten, so ist mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen (Fig. 9):

$$\text{für (K)} \quad \frac{\partial e}{\partial e_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad \frac{\partial e}{\partial e_1} = \frac{\partial \sigma \cos \gamma}{\partial \sigma \cos \delta} = \frac{\cos \gamma}{\cos \delta},$$

$$\text{für (D)} \quad \frac{\partial e}{\partial e_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad \frac{\partial e}{\partial e_1} = \frac{\partial s \cos \alpha}{\partial s \cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Daraus folgt:

$$\cos \alpha : \cos \beta = \lambda_1 : \lambda, \quad \cos \gamma : \cos \delta = \lambda : \lambda_1.$$

Da $\lambda < \lambda_1$ angenommen ist, so wird nunmehr sein $\beta > \alpha$, $\gamma > \delta$. Demnach kann $\beta + \delta = \alpha + \gamma = \pi/2$ werden, in welchem Falle (K) und (D) orthogonal sind. Wenn man dagegen eine (K)-Curve mit einer (J)-Curve verbindet, so resultirt:

$$\text{für (J)} \quad \frac{\partial e}{\partial e_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad \frac{\partial e}{\partial e_1} = \frac{\partial s_1 \cos \alpha_1}{\partial s_1 \cos \beta_1},$$

$$\text{also:} \quad \cos \alpha_1 : \cos \beta_1 = \lambda : \lambda_1 = \cos \gamma : \cos \delta.$$

Alsdann ist immer $\alpha_1 + \gamma > \beta_1 + \delta$, d. h. KP.J stets von 90° verschieden. Nur für $\lambda_1 = \lambda$ tritt Orthogonalität ein, und wie bereits bemerkt worden ist, coincidiren (J) und (D). (Fig. 8).

Es lassen sich weiter die Winkel α , β , γ , δ , α_1 und β_1 als Functionen von e und e_1 ausdrücken. In kurzer Form ist:

$$(K) \quad \frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} = m_1, \quad (D) \quad \frac{e}{\lambda_1} - \frac{e_1}{\lambda} = k_1, \quad (J) \quad \frac{e}{\lambda} - \frac{e_1}{\lambda_1} = l_1.$$

Nach der ersten Gleichung ist:

$$e_1^2 = e^2 + d^2 - 2ed \cos \vartheta = m_1^2 \lambda_1^2 - 2m_1 e \frac{\lambda_1^2}{\lambda} + e^2 \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}$$

und:

$$\frac{e \partial \vartheta}{\partial e} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{d \cos \vartheta - m_1 \frac{\lambda_1^2}{\lambda} + e \frac{\lambda_1^2 - \lambda^2}{\lambda^2}}{d \sin \vartheta}.$$

Eliminirt man $\cos \vartheta$ und m_1 mittels dieser und der (K)-Gleichung, so resultirt:

$$\operatorname{tg} \gamma^2 = \frac{\left\{ d^2 - (e^2 + 2ee_1 \frac{\lambda_1}{\lambda} + e_1^2) \right\}^2}{4e^2 d^2 \sin^2 \vartheta}$$

oder, wenn man den Inhalt des Dreiecks IPII mit Δ bezeichnet:

$$\operatorname{tg} \gamma^2 = \frac{\left\{ d^2 - (e^2 + 2ee_1 \frac{\lambda_1}{\lambda} + e_1^2) \right\}^2}{16 \Delta^2}.$$

Daraus folgt weiter:

$$\cos \gamma^2 = \frac{\lambda \Delta^2}{\lambda_1 e e_1 \left\{ (e + e_1)^2 - d^2 + \frac{e e_1}{\lambda \lambda_1} (\lambda_1 - \lambda)^2 \right\}}$$

und

$$\cos \delta^2 = \frac{\lambda_1 \Delta^2}{\lambda e e_1 \left\{ (e + e_1)^2 - d^2 + \frac{e e_1}{\lambda \lambda_1} (\lambda_1 - \lambda)^2 \right\}}.$$

Um die Werthe von $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ zu erhalten, geht man aus von (D) und setzt $-e_1$ statt e_1 , k_1 statt m_1 und vertauscht λ und λ_1 . Dann findet man:

$$\frac{e \partial \vartheta}{\partial e} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{d \cos \vartheta - k_1 \frac{\lambda^2}{\lambda_1} + e \frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2}}{d \sin \vartheta},$$

und wenn man $\cos \vartheta$ und k_1 mittelst (D) und der Relation:

$$e_1^2 = e^2 + d^2 - 2ed \cos \vartheta = k_1^2 \lambda^2 - 2k_1 e \frac{\lambda^2}{\lambda_1} + e^2 \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}$$

ausdrückt, so erhält man:

$$\cos \alpha^2 = \frac{\lambda_1 \Delta^2}{\lambda e e_1 \left\{ -(e - e_1)^2 + d^2 + \frac{e e_1}{\lambda \lambda_1} (\lambda_1 - \lambda)^2 \right\}},$$

und

$$\cos \beta^2 = \frac{\lambda \Delta^2}{\lambda_1 e e_1 \left\{ -(e - e_1)^2 + d^2 + \frac{e e_1}{\lambda \lambda_1} (\lambda_1 - \lambda)^2 \right\}}.$$

Wir haben noch die Winkel α_1 und β_1 für die (J)-Curven zu suchen. In Berücksichtigung von (D) haben wir hierbei λ und λ_1 , l_1 und k_1 zu vertauschen. Man erhält:

$$\cos \alpha_1^2 = \frac{\lambda \Delta^2}{\lambda_1 e e_1 \left\{ -(e - e_1)^2 + d^2 + \frac{e e_1}{\lambda \lambda_1} (\lambda_1 - \lambda)^2 \right\}},$$

$$\cos \beta_1^2 = \frac{\lambda_1 \Delta^2}{\lambda e e_1 \left\{ -(e - e_1)^2 + d^2 + \frac{e e_1}{\lambda \lambda_1} (\lambda_1 - \lambda)^2 \right\}}.$$

$$0 = Mm^4 + \tau - \pi \eta m^2 \{ p R^2 \cotg p(c_2 - c_1) - 4c_1 R^3 Q'(qR) \}$$

annimmt. Diese Gleichung besitzt, wie die früher untersuchte einfachere, unendlich viele Wurzeln m ; doch kommen von diesen aus den früher erörterten Gründen für das Experiment nur die complex-imaginären in Betracht, und von diesen brauchen wir nur die eine Wurzel:

$$m = a + bi,$$

in der beide Grössen a und b reell und positiv sind, zu berechnen, um durch Vertauschung der Vorzeichen die übrigen zu erhalten. Dasselbe gilt nach der obigen Doppelgleichung von q und, wie wir gleich einsehen werden, auch von p . Aus dem Quadrate:

$$m^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

erhält man dann die Schwingungszeit T und das logarithmische Decrement ϵ nach den Formeln:

$$T = \frac{\pi}{2ab}, \quad \epsilon = (a^2 - b^2) T.$$

Bei der Berechnung beschränke ich mich auf den Fall, dass der Abstand der Scheibe von der ruhenden Grenze $c_2 - c_1 = \infty$ gesetzt, und dass zugleich der Radius R der Scheibe im Verhältniss zu der Grösse $\sqrt{\eta/\rho}$ als sehr gross angesehen werden darf. Dann ist die in der hier zulässigen Form von

$$Q(qr) = \int_1^\infty dz \sqrt{z^2 - 1} e^{iqrz}$$

vorkommende Exponentialfunction, in deren Exponent:

$$iqrz = (ai - b) rz \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}$$

die Variabele r nie kleiner als R ist, eine mit wachsendem z sehr rasch abnehmende Function; denn nach früheren Rechnungen ist annäherungsweise

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{2T}}, \quad \text{also} \quad br \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} = r \sqrt{\frac{\pi\rho}{2\eta T}}$$

eine Grösse von beträchtlichem Werthe. Daraus folgt, dass der Werth der als bestimmtes Integral Q dargestellten Summe hauptsächlich durch denjenigen Werth bedingt wird, welchen

Lösung von salpetersaurem Natron.

Salzgehalt	Temp.	Alt	Neu	η_0	Temp.-Coëff.
82,62 45,24	17,9	0,0351	0,0255		
57,11 36,35	12,8	299	228	0,0291	0,0233
	17,0	266	207		
	23,8	231	187		
35,26 26,07	-3,0	340	257	0,0283	0,0280
	14,1	211	166		
	16,5	199	161		
	23,9	166	137		
16,31 14,02	-2,35	253	200	0,0191	0,0306
	9,3	185	152		
	16,5	150	126		
	24,1	131	111		

Lösung von salpetersaurem Kali.

Salzgehalt	Temp.	Alt	Neu	η_0	Temp.-Coëff.
16,76 14,35	10,55	0,0147	0,0128	0,0155	0,0279
	10,7	142	119		
	12,7	132	111		
	17,85	124	106		
	21,65	111	095		
11,81 10,57	10,45	150	126	0,0166	0,0307
	23,2	113	097		
7,70 7,15	10,42	151	127	0,0169	0,0322
	23,8	111	096		
4,79 4,57	10,5	151	127	0,0179	0,0349
	23,5	113	098		

Aus den letzten 4 Tabellen habe ich die in der folgenden zusammengestellten Werthe für 17,9° berechnet, um die Abhängigkeit des Reibungscoëfficienten vom Salzgehalt anschaulich zu machen. Ebenso wie früher habe ich versucht, diese Abhängigkeit durch Formeln von der Gestalt:

$$\eta = \{ \eta_w + 2 \eta_{ws} \sigma + \eta_s \sigma^2 \} \left(\frac{\rho}{1 + \sigma} \right)^2$$

darzustellen, indem ich für σ den Salzgehalt in 1 Theil Wasser, für ρ die Dichtigkeit der Lösung und für η_w die innere Reibung des Wassers einführte; die berechneten Werthe der Constanten η_{ws} und η_s , welche die Reibung des Salzes gegen Wasser und die innere Reibung des flüssigen Salzes bedeuten sollen, habe ich beigelegt.

sein, welche von der wirklich beobachteten Reihe — in der dritten Columne der Tabelle A — um die unter „Diff.“ daneben stehenden Werthe abweichen.

Tabelle B.

Quecksilberlänge bei durchweg gleichem Kaliber

	27,48	54,96	82,44	109,92	137,40	164,88	192,36	219,84
„Diff.“	0,00	+0,14	−0,24	−1,47	−1,45	−2,18	−2,96	−3,39
	247,32	274,80	302,28	329,76	357,24	384,72	412,20	439,68
	−3,37	−3,70	−4,18	−5,61	−6,49	−7,52	−8,90	−9,98
								−10,86.

Um nun eine für unsere weiteren Beobachtungen praktisch zu verwendende Tabelle zu bekommen, wurde zunächst noch für die mittleren Quecksilberlängen, welche in der dritten Columne der Tabelle A stehen, die Correcturen berechnet, und dann für ganze Zahlen die jedesmalige Correctur daneben gesetzt. Zur Erläuterung des Verfahrens beachte man Folgendes. Die Correctur für die beobachteten Quecksilberlängen 271,10 und 298,10 nach Tabelle A und B betragen beziehungsweise + 3,70 und + 4,18. Die mittlere Länge der Quecksilbersäule würde sein 284,55, und würde für diese Länge die Correctur $(3,70 + 6,14)/2$ gleich + 3,94 sein. Diese drei Correcturen werden aber sehr nahe auch für die den Zahlen 271,10, 284,55 und 298,10 am nächsten liegenden ganzen Zahlen gelten, d. h. es entsprechen den wirklich beobachteten Volumtheilen 271, 285 und 298 die Correctionen + 3,70, 3,94 und 4,18. Nach dieser Auffassung erhält man dann die Tabelle C als die im Folgenden praktisch verwendete Tabelle.

Tabelle C.

Abgelesene Längen in Millim.	Correct.	Abgelesene Längen in Millim.	Correct.	Abgelesene Längen in Millim.	Correct.
27	0,00	176	+ 2,57	324	+ 5,61
41	−0,07	189	2,96	338	6,05
55	−0,14	202	3,18	351	6,49
68	+ 0,05	216	3,39	364	7,00
82	0,24	230	3,38	377	7,52
95	0,86	244	3,37	390	8,21
108	1,47	258	3,54	403	8,90
122	1,46	271	3,70	416	9,44
136	1,45	285	3,94	430	9,98
150	1,82	298	4,18	443	10,42
163	2,18	311	4,90	456	10,86

oder auch, dass der Quotient $(v'/v)/(B+h/B-h') = Q = 1$ wird. Bei den folgenden drei Beispielen wurde bei derselben Menge der abgeschlossenen Luft eine dreifach verschiedene Quecksilbersäule angewandt. Ferner sei bemerkt, dass in jedem Beispiel die Sache so zu denken ist, dass der Röhre erst die Lage I, dann die Lage II, dann wieder die Lage I und dann wieder die Lage II gegeben wurde; jeder Versuch wurde also zweimal wiederholt.

Erstes Beispiel. $B = 741.9$ mm.

$p = (v)$	r	$p' = (v')$	r'
99,7	444,5	272,0	617,0
99,9	444,5	272,0	617,0
<u>99,80</u>	<u>444,5</u>	<u>272,0</u>	<u>617,0</u>
$h = 344,70$		$h' = 345,00$	
$v = 100,90$		$v' = 275,70$	
$(B + h) = 1086,6$		$(B - h') = 396,9$	
$\frac{v'}{v} = 2,732$		$\frac{B + h}{B - h'} = 2,738$	$Q = 0,998.$

Zweites Beispiel. $B = 741,9$ m.

$p = (r)$	r	$p' = (v')$	r'
91,0	537,1	366,1	814,7
91,0	537,0	366,0	814,7
<u>91,0</u>	<u>537,05</u>	<u>366,05</u>	<u>814,7</u>
$h = 446,05$		$h' = 448,65$	
$v = 91,67$		$v' = 373,12$	
$(B + h) = 1187,95$		$B - h' = 293,25$	
$\frac{v'}{v} = 4,070$		$\frac{B + h}{B - h'} = 4,051$	$Q = 1,005.$

Drittes Beispiel. $B = 741,9$.

$p = (v)$	r	$p' = (r')$	r'
103,5	404,7	245,0	545,0
103,8	404,7	245,0	545,0
<u>103,65</u>	<u>404,7</u>	<u>245,0</u>	<u>545,0</u>
$h = 301,05$		$h' = 300,0$	
$v = 104,93$		$v' = 248,37$	
$(B + h) = 1042,95$		$B - h' = 441,90$	
$\frac{v'}{v} = 2,367$		$\frac{B + h}{B - h'} = 2,360$	$Q = 1,003.$

Bei diesen Rechnungen bedeuten p und r , sowie p' und r' die den Enden der Quecksilbersäule entsprechenden und

Der Werth:

$$w = A \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{2\pi}{T} t + B \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi y}{l} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha \right)$$

genügt auch der Hauptdifferentialgleichung (1). Die Knotenlinien sind durch:

$$w = 0$$

ausgedrückt, welche aber nur dann von der Zeit unabhängig sind, wenn der Phasenunterschied α gleich Null ist.

Der verallgemeinerte Ausdruck (11) liefert eine grosse Anzahl von Curven für verschiedene Werthe von m , n und B/A , die sämmtlich mögliche Figuren sind, und die Chladni'schen als specielle Fälle einschliessen.

6. Es ist im allgemeinen unmöglich, die Figuren aus dem trigonometrischen Ausdruck streng mathematisch zu construiren. Sobald aber die Werthe der Constanten gegeben sind, kann man sich folgender Methode bedienen, um sämmtliche Figuren zu erhalten.

Die gegebenen Grössen sind:

$$m, \quad n, \quad \frac{B}{A} = \alpha.$$

Die Gleichung der Knotenlinien (12) lautet:

$$\cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{l} + \alpha \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi y}{l} = 0,$$

welche man folgendermassen umformen kann:

$$(13) \quad \frac{\cos \frac{m\pi x}{l}}{\cos \frac{n\pi x}{l}} = -\alpha \frac{\cos \frac{m\pi y}{l}}{\cos \frac{n\pi y}{l}}.$$

Nun berechne man die Werthe von:

$$(14) \quad r = \frac{\cos p m \pi}{\cos p n \pi}$$

für aufsteigende Brüche p von 0 bis 1, und es seien:

$$p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \quad r_1 \ r_2 \ r_3 \ \dots$$

zusammengehörige Werthe von p und r .

Mit den Werthen p als Abscissen und den entsprechenden Werthen r als Ordinaten construiren wir am zweckmässigsten graphisch eine Curve, die ich „Hülfscurve“ nennen will, oder wir stellen eine Tabelle der Werthe p und r auf.

3) innerhalb dieses Viertels folgende Punkte auf den Knotenlinien liegen müssen:

$$x = \frac{l}{14}; \frac{l}{14}; \frac{l}{14}; \frac{3l}{14}; \frac{3l}{14}; \frac{3l}{14}; \frac{5l}{14}; \frac{5l}{14}; \frac{5l}{14}; \frac{l}{6}.$$

$$y = \frac{l}{14}; \frac{3l}{14}; \frac{5l}{14}; \frac{l}{14}; \frac{3l}{14}; \frac{5l}{14}; \frac{l}{14}; \frac{3l}{14}; \frac{5l}{14}; \frac{l}{6}.$$

wo die übereinander stehenden Werthe zusammengehören. Dies sind die einzigen festen Punkte, aus denen Wheatstone die Figuren construirte.

Tabelle für $r = \frac{\cos 7p\pi}{\cos 3p\pi}$.

p	r	p	r	p	r
0	+1,000	$\frac{8}{42}$	+4,868	$\frac{15}{42}$	0,000
$\frac{1}{42}$	+0,888	$\frac{9}{42}$	0,000	$\frac{16}{42}$	+0,855
$\frac{2}{42}$	+0,555	$\frac{10}{42}$	−0,802	$\frac{17}{42}$	+1,108
$\frac{3}{42}$	0,000	$\frac{11}{42}$	−1,108	$\frac{18}{42}$	+1,569
$\frac{4}{42}$	−0,802	$\frac{12}{42}$	−1,110	$\frac{19}{42}$	+1,982
$\frac{5}{42}$	−1,982	$\frac{13}{42}$	−0,886	$\frac{20}{42}$	+2,247
$\frac{6}{42}$	−4,494	$\frac{14}{42}$	−0,500	$\frac{21}{42}$	0/0
$\frac{7}{42}$	∞				

Construirt man nach dieser Tabelle die Hülfscurve, so erhält man Fig. A.

Für verschiedene Werthe des Amplitudenverhältnisses B/A treten verschiedene Klangfiguren zu Tage. Wir wollen jetzt B/A von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren lassen und die Figur in einzelnen Stadien betrachten, um die dadurch vor sich gehende stetige Umformung derselben zu verfolgen. Wir werden sehen, dass diese Umformung cyklisch ist:

(I) $\frac{B}{A} = -\infty.$

Da $A = 0$ ist, so haben wir in diesem Falle nur die zweite Componente mit 3 Geraden senkrecht zur x -Axe und 7 senkrecht zur y -Axe. Fig. B entspricht diesem Falle.

(II) $\frac{B}{A} = -2.$

Hier berechnet man nach der allgemeinen Methode $-r/\alpha = r/2$ für die verschiedenen Werthe von p und bestimmt in der Hülfscurve die Abscissen p' , welche den Ordinaten $r/2$ entsprechen.

Da $B = 0$ ist, so haben wir in diesem Falle nur die erste Componente.

Fig. B, um 90° gedreht, entspricht diesem Falle.

$$(VI) \quad \frac{B}{A} = \frac{1}{2}.$$

Die diesem Amplitudenverhältniss entsprechende Figur geht aus der in (VIII) zu behandelnden Fig. F durch Drehung derselben um 90° hervor.

$$(VII) \quad \frac{B}{A} = 1.$$

Tabelle für p und p' . Fig. 7|3. $B/A = 1$.

$p = \frac{x}{l}$ (in 42tel)	$\frac{r}{-\alpha}$	$p' = \frac{y}{l}$ (in 42tel)		
0	-1,00	4,15;	10,40;	12,62.
2	-0,56	3,71;	9,60;	15,91.
4	+0,80	1,12;	8,58;	16,40.
6	+4,49	— ;	8,02;	— .
8	-4,87	— ;	6,10;	— .
10	+0,80	1,12;	8,58;	16,40.
12	+1,11	— ;	8,47;	17,00.
14	+0,50	2,09;	8,68;	16,04.
16	-0,56	3,71;	9,60;	15,91.
18	-1,57	4,67;	— ;	— .
20	-2,25	5,03;	— ;	— .

Diese Werthe liefern Fig. E.

$$(VIII) \quad \frac{B}{A} = 2.$$

Tabelle für p und p' . Fig. 7|3. $B/A = 2$.

$p = \frac{x}{l}$ (in 42tel)	$\frac{r}{-\alpha}$	$p' = \frac{y}{l}$ (in 42tel)		
0	-0,50	3,63;	9,51;	14,00.
2	-0,28	3,39;	9,25;	14,41.
4	-0,40	2,27;	8,76;	15,70.
6	+2,25	8,22;	— ;	20,00.
8	-2,43	5,12;	— ;	— .
10	+0,40	2,27;	8,76;	15,70.
12	+0,56	2,00;	8,64;	16,00.
14	+0,25	2,57;	8,63;	15,67.
16	-0,28	3,39;	9,25;	14,41.
18	-0,79	3,95;	9,94;	13,38.
20	-1,12	4,27;	11,00;	12,00.

Diese Werthe liefern Fig. F.

terliess beim Abdampfen eines halben Liters keinen Rückstand.

$$H = 765,1.$$

$A = 0,0$				$Q = 2,0$	
Nach 10 Compressionen				Nach 1 Dilatation	
1 ^m	2 ^m			1 ^m	
1,0	0,7			0,1	
1,2	0,8			0,1	

Nr. 2. Das zum Versuch Nr. 1 benutzte Wasser wurde mit Schwefelsäure und übermangansaurem Kali versetzt, und durch Destillation aus dieser Lösung das Präparat Nr. 2 gewonnen.

$$H = 763,2.$$

$A = 0,2$					$Q = 1,9$		
Nach 10 Compressionen					Nach 1 Dilatation		
0,5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
5,1	1,1	0,7	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3
5,0	1,1	0,6	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3

Man bemerkt, dass die Unterschiede der Tensionen beobachtet nach einer Verkleinerung oder Vergrösserung des Dampfraumes nicht verschwunden sind. Eine Wirkung des übermangansauren Kalis auf das benutzte angesäuerte Wasser war nicht wahrzunehmen; in mehreren Stunden entfärbte sich das durch übermangansaures Kali schwach rosa gefärbte Wasser nicht. Dagegen wurde dasselbe Wasser, wenn man zu demselben frisch geschmolzenes Natron und eine Spur übermangansaures Kali brachte, erst violett, dann dunkler und schliesslich grün gefärbt.

Nr. 3. Das oben benutzte Wasser wurde 2 Tage lang mit Barythydrat und übermangansaurem Kali behandelt und aus dieser Lösung durch Destillation das Präparat Nr. 3 gewonnen.

$$H = 758,2.$$

$A = 0,5$				$Q = 2,0$	
Nach 10 Compressionen				Nach 1 Dilatation	
1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	1 ^m	2 ^m
0,6	0,4	0,3		0,4	0,3
0,7	0,6	0,5	0,5	0,6	0,5
0,7	0,7	0,6	0,5	0,6	0,6

Trotzdem das Manometer eine Luftblase enthielt, unterscheiden sich die Tensionen, beobachtet nach einer Verklei-

Brachte man alsdann in obiges Manometer 0,25 g einer wässerigen Benzollösung¹⁾ (1 g Wasser enthielt 0,0005 g Benzol), so enthielt die Lösung im Manometer auf 1 g Wasser 0,0001 g Benzol.

$$H = 764,3.$$

$A = 0,6$			$Q = 1,0$	
Nach 1 Compression			Nach 1 Dilatation	
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m
1,0	1,0	0,8	0,5	0,5
1,1	0,9	0,8	0,4	0,5

Es genügt die angegebene geringe Verunreinigung des Wassers durch Benzol, um die Verschiedenheiten der Tensionen hervorzurufen.

Fügte man in dasselbe Manometer noch 0,5 g der benutzten Benzollösung, so enthielt jetzt das Manometer auf 1 g Wasser 0,0002 g Benzol. Die folgenden Beobachtungen zeigen die Erscheinung bedeutend vergrößert.

$$H = 755,5.$$

$A = 0,6$			$Q = 1,4$		
Nach 1 Compression			Nach 1 Dilatation		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
2,2	1,6	1,4	-0,1	0,1	
3,6	2,6	2,4	1,9	1,8	

Nr. 6. Das wie beim Versuch Nr. 3 gereinigte Wasser zeigte folgende Tensionen.

$$H = 765,0.$$

$A = 0,3$			$Q = 1,0$	
Nach 10 Compressionen			Nach 1 Dilatation	
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m
0,4	0,1	0,0	0,0	-0,1
0,3	0,4	0,1	0,3	0,0
0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

In dieses Manometer wurden 0,25 g einer Lösung von Aether in Wasser gebracht (1 g Wasser enthielt 0,004 g Aether). Demnach enthielt die Lösung im Manometer auf 1 g Wasser 0,0005 g Aether.

1) Ob die Concentration der Benzollösung wirklich so gross war, wie oben angegeben, bleibt fraglich. Es ist wahrscheinlich, dass sich nicht alles dem Wasser zugesetzte Benzol gelöst hatte.

$$H = 765,0.$$

$A = 2,3$			$Q = 1,2$			
Nach 1 Compression			Nach 1 Dilatation			
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m
3,1	2,6	2,4	2,0	1,9		
3,6	3,1	2,8	2,7	2,6		
4,3	3,7	3,4	3,1	3,0	2,5	2,2

Die zu folgenden Versuchen benutzten Präparate stammten von Kahlbaum. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes über die Reinigung der Präparate angegeben ist, so wurde bei der Reinigung in folgender Weise verfahren. Das käufliche Präparat wurde zuerst fractionirt destillirt; erste Fraction. Dann wurde die erste Fraction abermals über Chlorcalcium destillirt, und schliesslich wurde die zweite Fraction nochmals über einer späterhin genauer angegebenen wasserentziehenden Substanz direct, wie oben beschrieben, in die Manometer destillirt.

II. Aether.

Nr. 1. Die erste Fraction des käuflichen Aethers zeigte folgende Tensionen. Dieses Manometer tauchte in ein Bad, welches wie das zu den Versuchen mit Wasser dienende construirt war; infolge dessen stieg die Temperatur im Bade beständig.

$$H = 755,1.$$

$A = 4,5$			$Q = 0,8$	
Nach 1 Compression			Nach 1 Dilatation	
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m
20	16	13	6,4	6,4
18	15	13	10,2	10,0
24	21	18	14,0	14,0

Nr. 2. Die zweite Fraction wurde über Natrium direct in die Manometer destillirt. Im Dampfkessel befand sich die erste Fraction und Chlorcalcium.

$$H = 752,7. \text{ Manometer II.}$$

a) $A = -3,6$			$Q = 0,4$		b) $A = -0,1$			$Q = 0,7$	
Nach 10 Compr.			Nach 1 Dilat.		Nach 10 Compr.			Nach 1 Dilat.	
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m
0,5	-0,4	-1,9	-2,8	-2,6	5,1	3,6	2,0	0,0	0,2
1,0	-0,1	-1,6	-2,9	-3,1	5,8	4,4	2,2	0,2	0,3

Man bemerkt, dass trotz der Sorgfalt, mit der bei der Reinigung des Aethers verfahren wurde, die Tensionen nach den Compressionen sich von denen beobachtet nach den Dilatationen voneinander unterscheiden. Ausserdem sind die Tensionen desselben Präparates in den Manometern *a* und *b* nicht gleich.¹⁾

Nr. 3. Ein anderes wie bei Nr. 2 gereinigtes Präparat zeigte folgende Tensionen.

$H = 754,3$. Manometer III.

a) $A = -2,0$ $Q = 0,5$										
Nach 10 Compressionen					Nach 1 Dilatation					
1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	5 ^m	8 ^m
0,7	0,2	-0,5	-0,7					-1,9	-1,6	-1,6
2,6	1,4		0,8	0,4	-0,7	-0,5	-0,5			
4,3	3,3	2,3		1,4	-0,9	-0,5	-0,5		-0,4	

b) $A = -1,7$ $Q = 0,0$									
Nach 10 Compressionen					Nach 1 Dilatation				
1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m		1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	5 ^m
0,0	-0,4	-0,5	-0,7				-2,9	-2,1	-2,0
2,1	0,9	0,5	0,0		-0,8	-0,5	-0,4		
3,1	2,2	1,4	1,2		-1,3	-0,9	-0,8	-0,4	

Alsdann wurden ins Manometer *a* 0,1 g einer Lösung von Wasser in Aether (1 g Aether und 0,001 g Wasser) gebracht, demnach enthielt die Lösung in *a* auf 1 g Aether 0,0001 g Wasser. Die Lösung in *b* erhielt auf 1 g Aether 0,001 g Wasser.

$H = 754,3$.

a) $A = 4,7$ $Q = 0,6$					b) $A = 15,8$ $Q = 1,3$				
Nach 1 Compr.					Nach 1 Compr.				
1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m		1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	
9,5	9,3	8,7	8,0		21,0	20,3	19,8	19,1	
13,0	11,8	11,2	10,1		24,0	23,2	22,4	21,4	
14,4	14,0	12,1			26,8	24,3	23,3		

Nach 1 Dilat.					Nach 1 Dilat.				
1 ^m	2 ^m	5 ^m			1 ^m	2 ^m	4 ^m	5 ^m	
3,5	4,4	4,6			10,8	13,4		15,2	
3,4	4,5	5,0			9,6	12,4	15,1		

III. Schwefelkohlenstoff.

Die zweite Fraction wurde über Chlorcalcium direct in die Manometer destillirt. Im Dampfkessel kochte die erste Fraction über Chlorcalcium.

1) Stets wurde die zu untersuchende Substanz zuerst in das Manometer *a*, dann in das Manometer *b* destillirt.

$H = 761,0$. Manometer II.

a) $A = 0,4$				$Q = 0,8$			b) $A = 4,6$				$Q = 0,4$		
Nach 10 Compr.				Nach 1 Dilat.			Nach 10 Compr.				Nach 1 Dilat.		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
3,1	2,5	2,0		0,8		0,4	5,9	5,9	5,9	5,9	5,1	5,5	
2,0	1,7	1,4	1,2	0,1	0,0	0,0	5,7	5,7	5,6	5,5	3,3	3,6	4,0
3,9	3,1	2,6	2,6	0,0	0,0	0,0	6,2	6,2	6,3		3,6	3,7	3,6
4,7	3,8	3,1	2,5	-0,2	0,0	0,0	7,2	6,7	6,4	6,5	3,5	3,7	3,9

Zu 25 g Schwefelkohlenstoff wurden 0,005 g Wasser gebracht; diese Wassermenge löste sich nicht vollständig. In jedes Manometer kamen 0,33 g jener Lösung. Demnach enthält die Lösung in beiden Manometern auf 1 g Schwefelkohlenstoff höchstens 0,00014 g Wasser.

 $H = 761,0$.

a) $A = 9,0$				$Q = 0,8$			b) $A = 11,7$				$Q = 0,9$		
Nach 1 Compr.				Nach 1 Dilat.			Nach 1 Compr.				Nach 1 Dilat.		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
11,5	10,8	10,8	10,6	8,2	8,4	8,6	13,7	13,7	13,6	13,6	9,8	11,4	11,4
12,8	12,1	11,4		7,2	8,4	8,5	14,7	14,4	14,1		10,0	11,1	11,1
12,2	11,5	11,2					14,5	14,2	14,9				

Nr. 2. Ein anderes wie Nr. 1 gereinigtes Präparat. **$H = 760,4$. Manometer III.**

a) $A = -1,9$				$Q = 1,4$				b) $A = -0,2$				$Q = 0,4$		
Nach 10 Compr.				Nach 1 Dilat.				Nach 10 Compr.				Nach 1 Dilat.		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	5 ^m
1,0	0,1	-0,5	-0,8	-1,7	-1,6		-1,5	6,6	3,8	3,5		0,7	1,0	1,4
5,2	4,1	3,3	2,4	-1,5	-1,3	-1,4		6,7	5,8	5,2	4,6	1,2	0,9	1,3
4,0	3,2	3,0						6,2	5,4	5,0				

In jedes der obigen Manometer brachte man 0,35 g einer Lösung von Aether in Schwefelkohlenstoff (11 g Schwefelkohlenstoff enthielten 0,01 g Aether). Demnach enthielt die Lösung in a) auf 1 g Schwefelkohlenstoff 0,0001 g Aether und die in b) auf 1 g Schwefelkohlenstoff 0,0003 g Aether.

 $H = 760,5$.

a) $A = -0,3$				$Q = 1,6$				b) $A = 4,8$				$Q = 0,6$			
Nach 1 Compr.				Nach 1 Dilat.				Nach 1 Compr.				Nach 1 Dilat.			
1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m
1,7	1,0	0,9		-0,7	-0,3	0,1		4,8	3,4	3,4		2,5	3,5	3,8	
6,4	5,0	4,1						9,4	8,0	7,1					
8,0	7,0	5,4						10,6	9,5	8,6					
8,0	7,2	5,8	4,4	-0,6	0,4	0,6	0,7	11,2	10,2	9,4	7,9	3,4	3,9	3,7	4,1

IV. Benzol.

Die erste Fraction des Benzols liess man erstarren, schmolz dann den grössten Theil des Benzols und destillirte den starren Rest über Natrium direct in die Manometer. Im Dampfkessel kochte die erste Fraction über Chlorcalcium.

$H = 758,3$. Manometer III.

a) $A = 3,4$ $Q = 0,1$			b) $A = 1,5$ $Q = 0,5$.		
Nach 5 Compr.			Nach 5 Compr.		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
5,8	5,3	4,6	4,5	3,8	3,3
8,0	6,3	6,1	5,9	5,1	4,6
7,4	7,0	6,8	5,8	5,3	5,2

In obige Manometer wurde eine Lösung von Wasser und Alkohol in Benzol (1 g Benzol enthielt 0,0013g 95 procentigen Alkohol) gebracht. Ins Manometer *a* wurden 0,2 g, ins Manometer *b* 0,33 g der Lösung eingeführt. Demnach waren die Lösungen in beiden Manometern von gleicher Concentration (1 g Benzol enthielt 0,0001 g 95 procentigen Alkohol).

$H = 758,3$.

a) $A = 16,0$ $Q = 0,2$			b) $A = 15,3$ $Q = 0,7$		
Nach 1 Compr.			Nach 1 Compr.		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
19,0	18,8		20,9	20,0	
19,7	19,9	19,9	23,8	22,0	21,3
21,1	21,3		24,3	23,3	

V. Alkohol.

Zu 95procentigem, doppelt rectificirtem Spiritus wurde ein Drittel seines Gewichtes Chlorcalcium gefügt. Ein Drittel des Alkohols aus der Lösung destillirt; erste Fraction. Das Destillat wurde dann über Kalk direct in die Manometer destillirt. Im Dampfkessel kochte die erste Fraction über Kalk.

$K = 759,7$. Manometer II.

a) $A = -1,7$ $Q = 0,7$			b) $A = -2,0$ $Q = 0,7$		
Nach 10 Compr.			Nach 10 Compr.		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
-0,8	-0,9	-0,9	-0,8	-0,8	-0,9
-0,5	-0,5	-0,5	-0,6	-0,6	-0,5
-0,4	-0,3	-0,3	-0,4	-0,4	-0,4

Alsdann wurden in jedes Manometer 0,05 g 95 procentigen Alkohols gebracht, also enthielt jedes Manometer auf 1 g Alkohol 0,005 g Wasser.

a) $A = 1,6$ $Q = 0,8$			b) $A = 1,5$ $Q = 0,8$		
Nach 10 Compr.			Nach 10 Compr.		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
3,4	2,4	2,4	2,6	2,6	2,6
3,8	3,0		2,4	2,4	
3,1	2,5		2,7	2,2	

VI. Methylalkohol

Ein von Kahlbaum als acetonfrei bezogenes Präparat wurde über Kalk fractionirt; erste Fraction. Diese Fraction wurde abermals über Kalk direct in die Manometer destillirt. Im Dampfkessel kochte die erste Fraction über Kalk.

$H = 754,8$. Manometer II.

a) $A = -8,9$ $Q = 0,8$			b) $A = -10,2$ $Q = 0,1$		
Nach 5 Compressionen			Nach 1 Dilatation		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
-7,4	-7,8	-8,2	-12,8	-11,9	-11,3
-6,3	-7,4	-8,3	-13,0	-12,0	-11,3
-7,3	-7,9	-8,5			

Zu 1 g der zweiten Fraction wurden 0,3 g Wasser gefügt. Von dieser Lösung wurden ins Manometer *a* 0,3 g, ins Manometer *b* 0,16 g gebracht. Demnach enthielt die Lösung in *a* auf 1 g Methylalkohol 0,002 g Wasser und im Manometer *b* auf 1 g Methylalkohol 0,0003 g Wasser.

$H = 754,8$.

a) $A = -0,8$ $Q = 0,8$			b) $A = -6,4$ $Q = 0,9$		
Nach 1 Compr.			Nach 1 Compr.		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
4,4	2,6	2,5	11,1	9,9	9,9
2,3	2,3	2,1	11,1	10,0	10,7
4,0	3,2	2,6	13,2	12,3	11,7

VII. Chloroform.

Ein käufliches Präparat (aus Alkohol mittelst Chlorkalk) wurde direct über Chlorcalcium in die Manometer destillirt. Im Dampfkessel kochte das nicht weiter gereinigte Präparat über Chlorcalcium.

Nr. 1. $H = 750,3$, Manometer II.

a) $A = -7,3$ $Q = 0,4$.

Nach 1 Compression			Nach 1 Dilatation			
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m
-3,3	-5,1	-6,2	-13,6	-11,8	-11,0	-9,8
-2,0	-3,2	-5,0	-13,6	-10,9	-10,0	
-3,0	-6,0	-5,2	-11,0	-9,6		

b) $A = -10,0$ $Q = 0,7$

Nach 1 Compression			Nach 1 Dilatation			
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	5 ^m
-8,8	-9,5	-9,4	-12,3	-11,3	-10,8	-10,3
-7,8	-9,2	-9,2	-10,0	-10,0	-10,2	
-6,6	-7,6	-7,2	-10,2	-9,6		

Nr. 2. Chloralhydrat wurde mit Barytlösung zersetzt, das Chloroform abdestillirt, dann unter zehnmaliger Erneuerung des Wassers gewaschen, fractionirt destillirt und die zweite Fraction über Schwefelsäure direct in die Manometer destillirt. Die Füllung des Dampfkessels war wie bei Versuch Nr. 1.

$H = 763,2$. Manometer II.

a) $A = -18,5$ $Q = 0,6$

Nach 10 Compressionen			Nach 1 Dilatation		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
-16,5	-16,8	-16,9	-20,1	-19,9	-20,1
-15,0	-15,5	-15,3			

b) $A = -20,1$ $Q = 0,1$

Nach 10 Compressionen			Nach 1 Dilatation		
1 ^m	2 ^m	3 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m
-15,5	-16,3	-18,1	-20,8	-20,6	-20,4
-12,8	-14,3	-15,7			

VIII. Essigsäure.

Essigsäure, durch einmaliges Ausfrieren gereinigt, wurde über wasserfreiem Kupfersulfat direct in die Manometer destillirt. Die Manometer wurden in einem Glasrohr durch einen Strom Wasserdampf erhitzt.

Namenregister zum Jahrgang 1887.

A.

- Arons, L., Electromotorische Gegenkraft im Lichtbogen 30, 95.
Arrhenius, S., Leitungsvermögen von Mischungen wässriger Säurelösungen 30, 51. — Leitungsvermögen der phosphorescirenden Luft 32, 545.

B.

- Bender, C., Salzlösungen 31, 872.
Bergmann, J., s. Oberbeck.
v. Bezold, W., Zerlegung des weissen Lichts in Complementärfarben 32, 165. — Rotirende Flüssigkeiten 32, 171.
Blümcke, A., Specifische Gewichte einiger Gemische von Aethylalkohol und Kohlensäure 30, 243.
Bock, O., Electrisches Leitungsvermögen von Verbindungen aus Schwefel und Kalium in Lösung, von Natriummonosulfid und Borsäure 30, 631.
du Bois, H. E. J. G., Magnetische Circularpolarisation in Cobalt und Nickel 31, 941.
Boltzmann, L., Nachträge und Berichtigungen 31, 139. — Wirkung des Magnetismus auf electrische Entladungen in verdünnten Gasen 31, 789.
Braun, F., Löslichkeit fester Körper und Volumen- und Energieänderungen dabei 30, 250. — Abnahme der Compressibilität von Chlorammoniumlösung mit steigender Temperatur 31, 331. — Electrisches Verhalten des Steinsalzes 31, 855. — Compressibilität einer Lösung und ihrer Bestandtheile 32, 504.
Brockmann, W., Orgelpfeifen 31, 78.
Budde, E., Electrodynamische Punktgesetze von Weber, Riemann und Clausius 30, 100. —

Induction durch rotirende Magnete und neue Classe von Inductionserscheinungen 30, 358. — Zusammenhang von Wärme und Electricität 30, 664.

Bunsen, R., Dampfcalorimeter 31, 1.

C.

Clausius, R., Dynamoelectrische Maschinen 31, 302.

D.

Drude, P., Reflexion und Brechung des Lichtes an absorbirenden Krystallen 32, 584.

Dvořák, V., Akustische Beobachtungen 31, 536.

E.

Ebeling, A., Electromotorische Kraft einiger Thermoelemente aus Metallen und den Lösungen ihrer Salze 30, 530.

Ebert, H., Wellenlänge und Intensität des Lichtes 32, 337.

Edlund, E., Unipolare Induction 30, 655.

Elsas, A., Nobili'sche Farbenringe 30, 620.

Elster, J., u. H. Geitel, Electrisirung der Gase durch glühende Körper 31, 109. — Electricitätsentwicklung bei der Tröpfchenreibung 32, 74.

Emden, R., Dampfspannungen von Salzlösungen 31, 145.

v. Ettingshausen, A., Neue polare Wirkung des Magnetismus auf die galvanische Wärme 31, 737.

Exner, F., Contacttheorie 32, 53. 575.

F.

Föppl, A., Die Electricität als elastisches Fluidum 31, 306.

Friedrichs, F., Galvanische Batterie 32, 191.

- Koosen, H. J., Erhöhung der electromotorischen Kraft des Zinks durch Alkalien 32, 508.
Krüger, R., Widerstand dünner Metallplatten 32, 572.

L.

- v. Lang, V., Electromotorische Kraft des Lichtbogens. II. 31, 384.
Lenard, Ph., Schwingungen fallender Tropfen 30, 209.
Lommel, E., Phosphorescenz 30, 473.
Lorberg, H., Dynamoelectrische Maschine 30, 389. 32, 521. — Erweiterung auf Bemerkungen des Hrn. Boltzmann 31, 131.

M.

- Mach, E., u. P. Salcher, Photographische Fixirung der durch Projectile in der Luft eingeleiteten Vorgänge 32, 277.
Matthiessen, L., Wanderung der Interferenzcurven zweier mikroskopischer Kreiswellensysteme auf der Oberflächenhaut von Flüssigkeiten 32, 626.
Melde, F., Akustische Experimentaluntersuchungen 30, 161. — Anwendungen enger Glasröhren 32, 659.
Meyer, G., Brechungsquotient des Eises 31, 321.
Meyer, O. E., Innere Reibung nach Coulomb's Verfahren 32, 642.
Müller-Erbach, W., Geschwindigkeit der Dissociation und Messung der begleitenden Dampfspannung 31, 75. — Verdampfungsgeschwindigkeit als Maass für den Dampfdruck 31, 1040. — Dissociation des Kupfervitriols in höherer Temperatur 32, 313.
Mund, O., Polbestimmung der Influenzmaschine 31, 138.

N.

- Nahrwold, R., Luftelectricität 31, 448.
Natanson, Ed., Abkühlung der Kohlensäure bei ihrer Ausdehnung 31, 502.

- Neesen, F., Akustische Beobachtungen 30, 432. 32, 310.
Nernst, W., Electromotorische Kräfte durch Magnetismus in von einem Wärmestrome durchflossenen Metallplatten 31, 760.

O.

- Oberbeck, A., Bezeichnung der absoluten Maasssysteme 31, 335. — Electromotorische Kräfte dünner Schichten 31, 337. — Inductionswage 31, 812.
Oberbeck, A., u. J. Bergmann, Electriche Leitungsfähigkeit der Metalle mit Hülfe der Inductionswage 31, 792.
Olszewski, A., Dichte des flüssigen Methans und verflüssigten Sauerstoffs und Stickstoffs 31, 58.

P.

- Peukert, W., Anomale Magnetisirung 32, 291.
Pfaundler, L., Bezeichnung der Maasssysteme 32, 188.
Pfeiffer, E., Sinusinductor 31, 127. — Galvanische Leitungsfähigkeit reinen Wassers und sein Temperaturcoefficient 31, 831.
Planck, M., Princip der Vermehrung der Entropie 30, 562. 31, 189. 32, 462.
Pringsheim, Chemische Wirkung des Lichts auf Chlorknallgas 32, 384.
Pulfrich, C., Totalreflectometer 30, 193. 487. — Krystallrefractoskop 30, 317. — Totalreflectometer 31, 724. — Wollaston'sche Methode 31, 734.
Puluj, J., Gestalt einer schwingenden Saite 31, 1033.

Q.

- Quincke, G., Anomale Erscheinungen bei dielectrischen Flüssigkeiten, besonders bei Rapsöl 32, 529.

R.

- Richarz, F., Wasserstoffsuperoxyd an der Anode bei der Electrolyse verdünnter Schwefelsäure 31, 912.

Fig. 10.

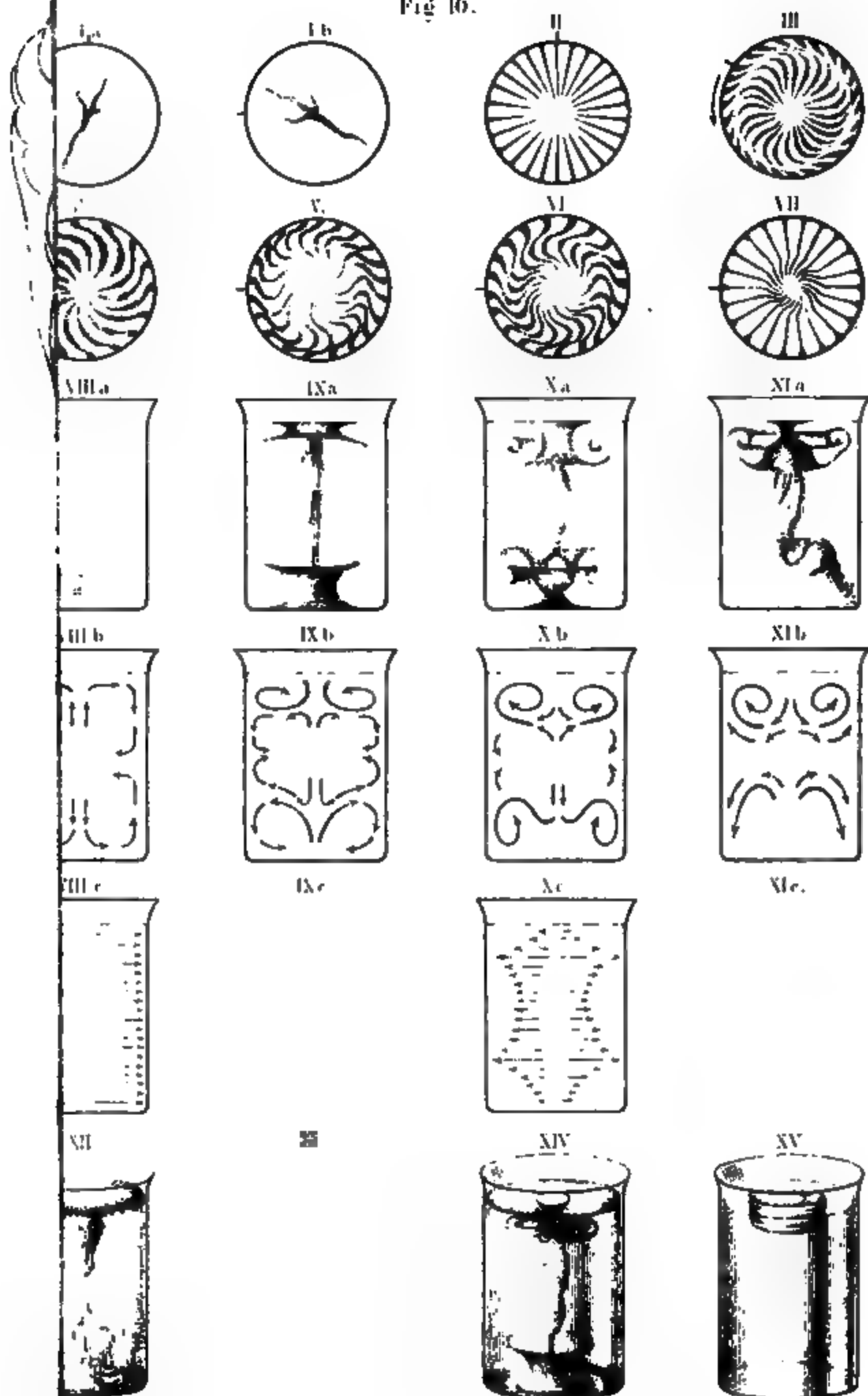
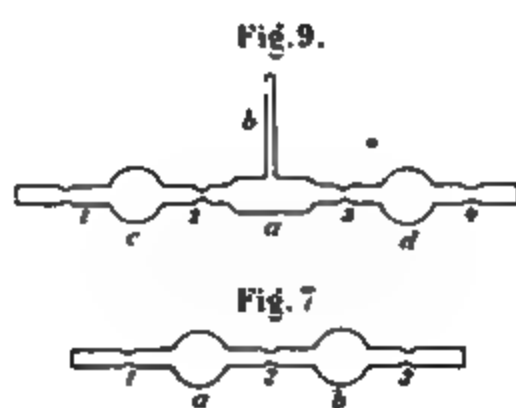
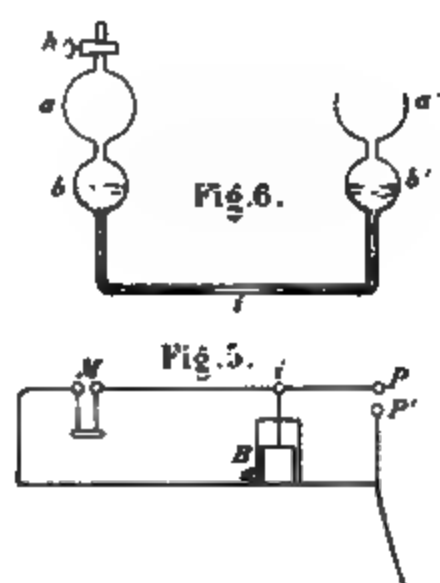
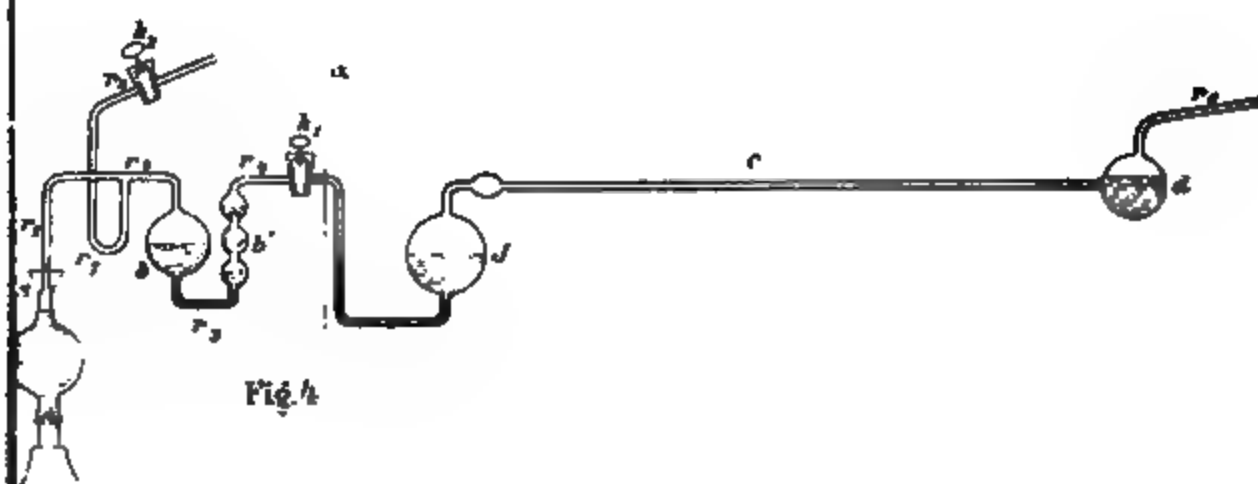


Fig. 8-10.

1/10 nat. GröÙe.





.

.

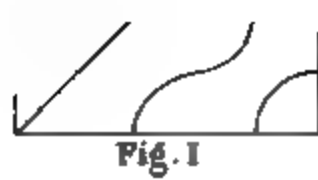
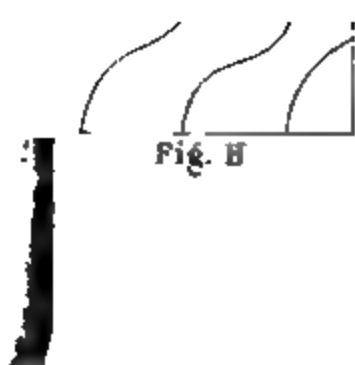
11/11/11

14.

1

1





1

.

.

.

